Doktori (Ph.D.) értekezés
Nyugat-magyarországi Egyetem, Faipari Mérnöki Kar
Cziráki József Faanyagtudomány- és Technológiák Doktori Iskola
Vezető: Dr. Dr. hc. Winkler András DSc. egyetemi tanár

Doktori program: Faszerkezetek
Programvezető: Dr. Divós Ferenc CSc. egyetemi tanár

Tudományág:
Anyagtudományok és technológiák

A faanyag és faalapú anyagok anizotrop tönkremeneteli elméleteinek vizsgálata alkalmazhatóságuk szempontjából

Készítette: Garab József
Témavezető: Dr. Szalai József CSc.

Sopron
2012

A faanyag és faalapú anyagok anizotrop tönkremeneteli elméleteinek vizsgálata alkalmazhatóságuk szempontjából

Értekezés doktori (PhD) fokozat elnyerése érdekében
*a Nyugat-Magyarországi Egyetem Cziráki József Faanyagtudomány- és Technológiák Doktori Iskolája

Faszerkezetek programja

Írta:
Garab József

**Készült a Nyugat-Magyarországi Egyetem Cziráki József Faanyagtudomány- és Technológiák Doktori Iskola

Faszerkezetek programja keretében

Témavezető: Dr. Szalai József ……………………….
Elfogadásra javaslom (igen / nem) (aláírás)
A jelölt a doktori szigorlaton …........ % -ot ért el,
Sopron, …................. …………………………..................
a Szigorlati Bizottság elnöke
Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom (igen /nem)

Első bíráló (Dr. …...................... …................) igen /nem ……………………
(aláírás)

Második bíráló (Dr. …...................... …................) igen /nem ……………………
(aláírás)

(Esetleg harmadik bíráló (Dr. …............. …...........) igen /nem ……………………..
(aláírás)

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján…..........% - ot ért el

Sopron,……………………….. ……………………………………
a Bírálóbizottság elnöke

A doktori (PhD) oklevél minősítése…..........................

………………………..
Az EDT elnöke

„Jobb dolgozni, mint dicsekedni.”

(Grozdits A. György)

Kivonat

A faanyag és faalapú anyagok anizotrop tönkremeneteli elméleteinek vizsgálata alkalmazhatóságuk szempontjából

Garab József, okleveles faipari mérnök, doktorjelölt

A faanyag összetett belső szerkezete miatt a faanyag szilárdságának megbecsülése viszonylag bonyolult feladat. A faszerkezetek kritikus pontjaiban lineáris, síkbeli és térbeli feszültségállapot uralkodhat. Mivel a faanyag mechanikai tulajdonságai a makroszkopikus szerveződési szinten leginkább az ortogonálisan anizotrop (ortotrop) anyagmodellnek felelnek meg, a tönkremenetel leírására anizotrop tönkremeneteli elméletekre van szükség.

A mechanika fejlődés-története folyamán számos tönkremeneteli elmélet született, ezek közül néhányat kifejezetten anizotrop anyagokra fejlesztettek ki. A tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságát azonban kísérletek segítségével alá kell támasztani. Kutatásunkban a von Mises, a Tsai-Wu és az Ashkenazi-féle tönkremeneteli elméleteket vizsgáltuk lucfenyő (*Picea abies*) faanyagon ható összetett feszültségállapot esetén. A síkbeli vizsgálatokkal kapcsolatos eredményeket a Bécsi Műszaki Egyetem Mechanika Intézete (*TU Vienna, Institute for Mechanics of Materials and Structures, IMWS)* bocsátotta rendelkezésünkre. A térbeli vizsgálatokat pedig – szintén a bécsi intézetben – mi végeztük el.

A tönkremeneteli elméletek kivétel nélkül úgy működnek, hogy a ható feszültségi állapotot a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében kell megadni. Ezért a kutatásunk során a faanyag éleihez, vagy a terhelőberendezés geometriájához kötött koordinátarendszerében kapott feszültségállapotokat transzformálni kellett. A tönkremeneteli viszonyszám definiálása után meghatároztuk azokat mindhárom elmélettel az összes kísérleti feszültségállapotra. A tönkremeneteli viszonyszám segítségével következtethetünk arra, hogy melyik elmélet írja le helyesebben a tönkremenetel fellépését.

Az eredmények azt mutatják, hogy összetett feszültségállapot esetén a von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi elméletek közül egyedül az Ashkenazi-féle elmélet írja le megfelelően a faanyagok tönkremenetelét. Ezért az Ashkenazi elméleten alapuló szilárdsági méretezés elméletileg és gyakorlatilag is megalapozott.

Kulcsszavak: anizotrop tönkremeneteli elméletek, biaxiális- és triaxiális vizsgálatok, feszültségállapotok transzformációja, tönkremeneteli viszonyszám, Ashkenazi elmélet

Abstract

Investigation into the usability of the strength criteria applied to wood and wood based materials

József Garab, MS. in wood science and technology, PhD. candidate

Prediction of the strength of wood is complicated due to the complex inner structure. At critical points of wooden structures linear, biaxial, and triaxial stress occurs. The mechanical properties of wood at the macroscopic scale are orthogonal anisotropic (orthotropic). Therefore, it is necessary to apply anisotropic strength criteria to describe the failure of wood.

Numerous strength criteria were created during the development of mechanics, including several focused on anisotropic materials. However, the usability of the strength criteria has to be validated with experiments. In our research, the von Mises, the Tsai-Wu, and the Ashkenazi strength criteria were tried on spruce (*Picea abies*) wood when complex stress state occurs. The Institute for Mechanics of Materials and Structures at the TU Vienna gave us the results of the biaxial experiments and we did the triaxial experiments.

The strength criteria work only when the stress states are in the main anatomical directions of the wood. Thus, the stress states from the experiments had to be transformed because the stress states were given in the coordinate system of the board axes or the axes of the testing machine. Moreover, the failure prediction numbers were determined. The strength criteria can be validated and compared with the failure prediction numbers.

The results show that in complex biaxial and triaxial stress states only the Ashkenazi strength criterion describes the failure of wood, not those of von Mises or Tsai-Wu. Therefore, we strongly recommend using the Ashkenazi strength criterion for designing wooden structures.

Keywords: anisotropic strength criteria, biaxial and triaxial experiments, transformation of the stress states, failure prediction number, Ashkenazi strength criterion

Tartalomjegyzék

Jelmagyarázat 8
1. Bevezetés 10
2. Az anizotrop tönkremeneteli elméletek bemutatása 13
2.1. Anizotrop anyagok tönkremenetele 13
2.2. Anizotrop szilárdsági kritériumok 13
2.2.1. A lineáris szilárdsági kritérium 14
2.2.2. A von Mises szilárdsági kritérium 14
2.2.3. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium 15
2.2.4. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium 15
2.3. A szilárdsági kritériumok tenzorkomponenseinek meghatározása 17
2.3.1. A lineáris kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása 18
2.3.2. A von Mises szilárdsági kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása 19
2.3.3. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása 20
2.3.4. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása 22
2.3.5. A sűrűség és a nedvességtartalom hatásának figyelembe vétele a tenzorkomponensek számításánál 22
2.4. A tönkremeneteli elméletek grafikus ábrázolása 23
2.4.1. A lineáris szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása 24
2.4.2. A von Mises szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása 25
2.4.3. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása 25
2.4.4. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása 26
3. Anizotrop tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának vizsgálata 29
3.1. A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása a normálszilárdságok iránytól való függése alapján 29
3.2. A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása energetikai alapon 31
3.3. A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása kísérleti adatok alapján 33

4. A kísérletek bemutatása 34
4.1. A kísérletek célja 34
4.2. A biaxiális törővizsgálatok bemutatása 35
4.3. A triaxiális törővizsgálatok bemutatása 38
5. Az összetett feszültségállapotok transzformációja a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe 41
6. A tönkremeneteli elméletek ellenőrzése 50
7. Eredmények és diszkusszió 52
7.1. A szilárdsági kritériumok tenzorkomponensei 52
7.2. A transzformált összetett feszültségállapotok 54
7.3. A tönkremeneteli elméletek ellenőrzése 55
8. A munkám alapján megfogalmazható tézisek 64
9. Konklúzió 68
10. Köszönetnyilvánítás 69
11. Irodalomjegyzék 70
Függelék 73

Jelmagyarázat

$a_{i'}$, $a_{i'j'}$, $a_{i'j'k'}$, $a_{i'j'k'l'}$, ... $a_{i'j'k'l'...q'}$ –1-, 2-, 3-, 4-, … az előbbi tenzorok, ill. azok komponensei a transzformált koordinátarendszerben (i', j', k', l', ... q'=1, 2, 3),

c – tetszőleges skalár,

CoV [%] – variációs koefficiens százalékos értékben megadva,

f_{12} – technikai szilárdság 12%-os nedvességtartalmi értéken,

f_u – technikai szilárdság a mért nedvességtartalmi értéken,

f_ρ – technikai szilárdság ρ=0,46 g/cm^3 sűrűségtartalmi értéken,

$f_{\rho'}$ – technikai szilárdság a mért sűrűségtartalmi értéken,

f_i^+ – az i irányhoz tartozó húzószilárdság (i=1, 2, 3 vagy L, R, T),

f_i^- – az i irányhoz tartozó nyomószilárdság (i=1, 2, 3 vagy L, R, T),

$f_{ij}^{k(\alpha)}$ – az i, j síkban lévő, az i tengellyel α szöget bezáró irányhoz tartozó normálszilárdság (i=1, 2, 3 vagy L, R, T),

$f_{ij}^{k(45)+}$ – húzószilárdság az ij irányok által képzett sík szögfelezőjében (i=1, 2, 3 vagy L, R, T),

$f_{ij}^{k(45)-}$ – nyomószilárdság az ij irányok által képzett sík szögfelezőjében (i=1, 2, 3 vagy L, R, T),

I_1,I_2 – az első és a második feszültségi invariáns,

L, R, T – a faanyag anatómiai főirányai: rost-, sugár-, és érintőirány,

LR, LT, RT – a faanyag anatómiai fősíkjai: sugár-, érintő-, bütüsík,

n – tönkremeneteli viszonyszám,

P – a triaxiális nyomóvizsgálatok során ható oldalnyomás,

t_{ij} – az i normálisú síkon ható, j tengellyel párhuzamos hatásvonalú nyírófeszültséghez vagy a j normálisú síkon ható, i tengellyel párhuzamos hatásvonalú nyírófeszültséghez tartozó szilárdságok közül a kisebbik. i=1, 2, 3 vagy L, R, T,

$t_{ij}^{k(45)}$ – nyírószilárdság, ha a nyírási sík normálisa merőleges a j tengelyre, az i tengellyel 45°-os szöget zár be, és a nyírófeszültség hatásvonala párhuzamos a j iránnyal,

a_i, a_{ij}, a_{ijk}, a_{ijkl}, ... $a_{ijkl...q}$ –1-, 2-, 3-, 4-, … z-dimenziós tenzorok, ill. azok komponensei a kiinduló koordinátarendszerben (i, j, k, l, ... q=1, 2, 3),

u – a faanyag nedvességtartalma,

$\tilde{U}$ – kiegészítő rugalmas potenciál,

x^i – a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszer főtengelyei (i=1, 2, 3),

$\beta_{i'}^{i}$, $\beta_{i}^{i'}$ – transzformációs mátrixok,

δ_{ij} – a Kronecker-delta,

ε_{kl} – a ható feszültségi állapot tenzora, ill. annak komponensei, (k, l =1, 2, 3),

ϑ – koordináta-transzformációs szög,

ρ – a faanyag sűrűsége,

Σ Biax – az összes biaxiális feszültségi állapot,

Σ Triax – az összes triaxiális feszültségi állapot,

σ^{egy} – egyenértékű feszültségi állapot,

σ^{ij} – a ható feszültségi állapot tenzora, ill. annak komponensei, (i, j =1, 2, 3),

φ – koordináta-transzformációs szög, ami a faanyag rostirányával megegyezik,

ψ – koordináta-transzformációs szög, ami a faanyag évgyűrűállásával megegyezik.

1. Bevezetés

Egy szerkezet teherbírása alatt azt értjük, hogy a szerkezet az őt érő környezeti hatásoknak (terhelésnek, hőmérsékletnek stb.) ellenáll és eredeti funkcióját maradéktalanul betölti. A teherbírás megszűnését tönkremenetelnek nevezzük. Egy szerkezet tönkremenetele az őt ért hatásoknak megfelelően végtelen sokféleképpen mehet végbe. Ez a tény nagyon megnehezíti a teherviselő szerkezet teherbírásának előrejelzését. A tudomány ezért azt a megoldást választja, hogy először meghatározza a szerkezetet alkotó anyag teherbírását. Az anyag teherbírását szilárdságnak nevezzük. Egy anyag esetében – az igénybevétel fajtájától függően – ez is sokféle lehet (pl.: húzó-, nyomó-, nyírószilárdság). A szerkezetet alkotó anyag(ok) szilárdságának és a szerkezet geometriai tulajdonságainak, ill. statikai erőjátékának ismeretében már következtethetünk az egész szerkezet teherbírására. Az anyagok tönkremenetelének jellege alapvetően két csoportra osztható. Szívós anyagoknál, mint pl. az acél, a folyáshatár elérésével, az alakváltozás olyan nagymértékű lesz, hogy a szerkezet már nem képes ellátni a feladatát, tehát tönkrementnek tekinthető. Rideg anyagoknál – ilyen tulajdonságú a faanyag is – a tönkremenetel repedések, törés formájában jelentkezik, melyet nem előz meg jelentős alakváltozás. E két tönkremeneteli forma között azonban igen széles az átmenet, sőt egy anyag tönkremenetelének jellege a külső körülményektől függően jelentősen változhat.

A szerkezetekben a külső terhelés hatására az igénybevételek általában olyan jellegűek, hogy hatásukra a testben összetett feszültségi állapot ébred. Ilyen feszültségi állapotban az anyag már akkor is tönkre mehet, ha egyetlen feszültségkomponense sem éri el az egyszerű feszültségi állapotnak megfelelő szilárdságot. Azt a feszültségi állapotot, melynél az anyag tönkremegy, tönkremeneteli határállapotnak nevezzük. Könnyen elképzelhető, hogy végtelen sok feszültségi állapot létezik, melynél az anizotrop anyag a tönkremenetel határállapotába kerülhet. A műszaki gyakorlat számára rendkívül fontos ezeknek a tönkremeneteli határállapotoknak az ismerete, azonban lehetetlen minden anyagra a végtelen sok határállapotnak a kísérleti meghatározása. Arra van szükségünk, hogy egy adott feszültségi állapot esetén el tudjuk dönteni, tönkre megy-e a vizsgált anyagunk vagy sem. Ezért a kutatók kísérleti eredmények és elméleti megfontolások alapján olyan módszereket dolgoztak ki, melyekkel választ kapunk a kérdésre. Ezeket az elméleteket tönkremeneteli elméleteknek nevezzük.

A fizikában a jó elmélet két feltételnek tesz eleget. Viszonylag kevés önkényes elemet tartalmazó modell alapján pontosan leírja a megfigyelések jelentős csoportját, de határozott előrejelzésekkel is szolgál jövőbeni megfigyelések eredményeiről. Így például Arisztotelész elmélete, mely szerint minden anyag négy elemből áll – föld, levegő, tűz, víz – kellőképpen egyszerű ugyan, de nem tesz semmiféle előrejelzést. Newton gravitációs elmélete még egyszerűbb modellen alapul: azon, hogy a testek vonzzák egymást, s a vonzóerő arányos a tömegükkel és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével. S mégis ez az egyszerű elmélet nagy pontossággal megjósolja a Nap, a Hold és az összes égitest mozgását (Hawking 1998). Karl Popper tudományfilozófus külön kiemelte: a jó elméletet éppen az jellemzi, hogy számos olyan előrejelzést tartalmaz, melyeket a megfigyelések csak később igazolnak. Az elmélet mindaddig érvényben marad, belévetett bizalmunk mindaddig nő, amíg az új kísérletek eredményei megfelelnek az előrejelzéseknek. A valóságban egy új elmélet gyakran nem más, mint a régi elmélet kiterjesztése.

A faanyagokra alkalmazott tönkremeneteli elméletek általában azt a módszert alkalmazzák, hogy a feszültségi állapotok összehasonlításához, egy tipikus, kísérlettel viszonylag egyszerűen meghatározható feszültségi állapotot választanak alapul, és valamilyen elfogadott kritériumot felhasználva, a tényleges feszültségi állapotot ehhez hasonlítják. Az egyes tönkremeneteli elméletek alapjaiban abban különböznek egymástól, hogy hogyan fogalmazzák meg az egyenértékű feszültségi állapot kritériumát. Egyenértékűek azok a feszültségi állapotok, melyeknél a tönkremenetel azonos valószínűségű. Összehasonlító feszültségi állapotként az egytengelyű húzásnak megfelelő feszültségi állapotot választják, mivel az viszonylag egyszerűen előállítható, és a tönkremeneteli határállapot feszültségi állapota egy adattal, az f^{+} húzószilárdsággal jellemezhető. Az összetett feszültségi állapotok alapján egy egyenértékű feszültséget számítanak. Ez egy fiktív lineáris feszültségi állapot, és egyetlen nem nulla normálfeszültség-komponensét, egyenértékű feszültségnek nevezzük. Lineáris feszültségi állapotban az anyag akkor megy tönkre, ha a húzófeszültség eléri az f^{+} húzószilárdságot, így a tényleges feszültségi állapot akkor nem okoz tönkremenetelt, ha az egyenértékű feszültség kisebb, mint a húzószilárdság, ill. határesetben egyenlő vele.

Nincsen tönkremenetel, ha

$$f^{+} \geq \sigma^{egy}. \qquad 1.1$$

A $\sigma^{egy} = \sigma^{egy}(\sigma^{ij})$ egyenértékű feszültség konkrét függvényalakját az alkalmazott tönkremeneteli elmélet szabja meg. A műszaki mechanika fejlődése során többféle tönkremeneteli elméletet dolgoztak ki a tudósok. Izotrop anyagokra kidolgozott tönkremeneteli elméletek pl. a Coulomb, a Tresca, Mohr és a belső alaktorzulási energia elméletek.

Kutatásunk az anizotrop anyagok tönkremenetelének vizsgálatára irányul, amely során összehasonlítjuk gyakorlati alkalmazhatóság szerint a három leggyakrabban használt tönkremeneteli elméletet: a von Mises, a Tsai-Wu és az Ashkenazi elméletet.

2. Az anizotrop tönkremeneteli elméletek bemutatása

2.1. Anizotrop anyagok tönkremenetele

Anizotrop anyagok tönkremenetelénél nemcsak a feszültségi állapot komponenseinek nagysága befolyásol, hanem az is, hogy a feszültségi főtengelyek milyen helyzetben vannak az anyag szerkezeti szimmetriatengelyeihez képest. Erre kiváló példa a természetes faanyag húzóvizsgálatánál tapasztalható eredmények. Faanyag esetén, rostokkal párhuzamos irányban ható, a húzószilárdságnál kisebb normálfeszültség még éppen nem okoz tönkremenetelt, azonban rostra merőleges irányban az anyag már biztosan elszakad (pl. Kollmann 1951, Molnár 2004). A szilárdsági jellemzőket célszerű természetes faanyag esetén az anatómiai főirányok rendszerében megadni, és a feszültségi állapotot is erre a rendszerre érdemes átszámolni. A faanyag összetett szerkezete miatt a faanyag szilárdságának megbecsülése viszonylag bonyolult feladat. Faszerkezetek kritikus pontjaiban összetett feszültségi állapot is uralkodhat. Mivel a faanyag anizotrop, ezért anizotrop tönkremeneteli elméletek alkalmazása szükséges.

2.2. Anizotrop szilárdsági kritériumok

A tudomány jelenlegi álláspontja szerint leghasználhatóbb szilárdsági kritériumok kivétel nélkül az alábbi általános alakú polinomba foglalhatók össze:

$$a_{ij}\sigma^{ij} + a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} + a_{ijklmn}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn} + a_{ijklmnop}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn}\sigma^{op} + \ldots \le c\,,^{*} \qquad 2.1$$

ahol,

σ^{ij} – a ható feszültségi állapot tenzora, ill. annak komponensei,

a_{ij}, a_{ijkl}, $a_{ijklmnop}$, … – a szilárdságra jellemző 2, 4, 6, 8, … dimenziós tenzorok,

c – tetszőleges skalármennyiség.

Ha a test vizsgált pontjában a ténylegesen ható feszültségi állapot összetevői 2.1-t kielégítik, a pont éppen a tönkremeneteli határállapotban van. Geometriai szempontból a szilárdsági határállapotot a feszültségek 9-, ill. a dualitás tétel értelmében, 6-dimenziós térben definiált hiperfelület adja meg. A c skalár értéke a felület jellegét nem, csak annak nagyságát befolyásolja, ezért célszerű egységnyire választani.

[*] Itt és a továbbiakban a szorzatként egymás mellett álló, alsó- és felsőindexes mennyiségeket a futó indexek lehetséges indexeire összegezni kell (Einstein féle jelölés-konvenció). Pl.: $a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

2.1 szerint az anyag valamely pontjában a szilárdságot annyi különböző dimenziójú tenzor jellemzi, ahány tagot veszünk fel, ill. hagyunk meg benne. Ez azonban matematikai és fizikai szempontból egyaránt kényelmetlen. A modern szilárdsági kritériumok éppen abban különböznek egymástól, hogy 2.1 bal oldalán hány és milyen típusú tagot tartanak meg, ill. hogyan definiálják a tenzorkomponensek fizikai értelmét. A 2.1-ből levezetett elméleteknél, egyenlőség fennállása esetén a vizsgált pont éppen a tönkremenetel határállapotában van. Ha a baloldal kisebb, mint a jobb, az anyag épen marad, ugyanakkor a reláció megfordulása tönkremenetelt jelent.

A következőkben röviden bemutatjuk az anizotrop anyagokra, így a természetes faanyagra is legelterjedtebben alkalmazott szilárdsági kritériumokat.

2.2.1. A lineáris szilárdsági kritérium

Lineáris közelítésnél a feszültségkomponenseknek csupán az első fokú hatványait engedjük meg, ezért 2.1-ből csupán az első tagot hagyjuk meg:

$$a_{ij}\sigma^{ij} \le 1 \qquad i, j = L, R, T \qquad 2.2$$

ahol,

L – a fa rostiránya (a törzs hossztengelye, longitudinális irány),

R – a fa sugáriránya (az évgyűrűk sugáriránya),

T – a fa húriránya (az évgyűrűk érintőjének az iránya).

A kifejtett alak sem túl bonyolult, hiszen ortotrop anyagnál az anatómiai főirányok rendszerében csak az azonos indexű tagok különböznek nullától:

$$a_{LL}\sigma^{LL} + a_{RR}\sigma^{RR} + a_{TT}\sigma^{TT} \le 1. \qquad 2.3$$

Mivel a szilárdság egyetlen kétdimenziós tenzorral nem jellemezhető (Szalai 1994), ez a tönkremeneteli elmélet a gyakorlatban nem alkalmazható faanyagra, ezért a kezdeti polinomunkból több tagot vagyunk kénytelenek megtartani, így eljutunk a gyakorlatban alkalmazható szilárdsági kritériumokhoz.

2.2.2. A von Mises szilárdsági kritérium

Olyan plasztikus anyagokra, melyeknél a húzó- és nyomószilárdság megegyezik, szilárdsági kritériumként von Mises (1928) egy másodfokú polinomot javasolt, melyet plasztikus potenciálnak nevezett:

$$a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \le 1 \ . \qquad i, j, k, l = L, R, T \qquad 2.4$$

Természetes faanyagra a von Mises szilárdsági kritérium a következő alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
& a_{LLLL}\sigma^{LL}\sigma^{LL} + a_{RRRR}\sigma^{RR}\sigma^{RR} + a_{TTTT}\sigma^{TT}\sigma^{TT} + \\
& (a_{RRTT} + a_{TTRR})\sigma^{RR}\sigma^{TT} + (a_{LLTT} + a_{TTLL})\sigma^{LL}\sigma^{TT} + (a_{LLRR} + a_{RRLL})\sigma^{LL}\sigma^{RR} + \\
& (a_{RTRT} + a_{RTTR} + a_{TRRT} + a_{TRTR})\sigma^{RT}\sigma^{RT} + \\
& (a_{LTLT} + a_{LTTL} + a_{TLLT} + a_{TLTL})\sigma^{LT}\sigma^{LT} + \\
& (a_{LRLR} + a_{LRRL} + a_{RLLR} + a_{RLRL})\sigma^{RL}\sigma^{RL} \leq 1.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

A fenti összefüggésben a zárójelben lévő összetevők fizikai szempontból egy értéket jelentenek. Mivel a faanyag ortotrop, ezért a független jellemzők száma 9. A konkrét fizikai jelentésüket ismét egyszerű igénybevételek alkalmazásával határozhatjuk meg.

2.2.3. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium

Tsai és Wu (1971) az általános szilárdsági kritérium (2.1) első két tagját tartotta meg. Ezt a szilárdsági kritériumot tetszőleges anizotrop anyagra alkalmazhatónak, és érvényesnek tekintette, még akkor is, ha a tönkremenetel nem plasztikus.

$$
a_{ij}\sigma^{ij} + a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \leq 1 \,, \qquad i, j, k, l = L, R, T \tag{2.6}
$$

Természetes faanyagra a Tsai-Wu kritérium a következő alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
& a_{LL}\sigma^{LL} + a_{RR}\sigma^{RR} + a_{TT}\sigma^{TT} + a_{LLLL}\sigma^{LL}\sigma^{LL} + a_{RRRR}\sigma^{RR}\sigma^{RR} + a_{TTTT}\sigma^{TT}\sigma^{TT} + \\
& (a_{RRTT} + a_{TTRR})\sigma^{RR}\sigma^{TT} + (a_{LLTT} + a_{TTLL})\sigma^{LL}\sigma^{TT} + (a_{LLRR} + a_{RRLL})\sigma^{LL}\sigma^{RR} + \\
& (a_{RTRT} + a_{RTTR} + a_{TRRT} + a_{TRTR})\sigma^{RT}\sigma^{RT} + \\
& (a_{LTLT} + a_{LTTL} + a_{TLLT} + a_{TLTL})\sigma^{LT}\sigma^{LT} + \\
& (a_{LRLR} + a_{LRRL} + a_{RLLR} + a_{RLRL})\sigma^{RL}\sigma^{RL} \leq 1.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Ortotrop anyagoknál, a zárójelben lévő tagok fizikai értelemben egyetlen mennyiséget jelentenek, tehát a kritérium kétdimenziós tenzorának 3, a négydimenziós tenzorának 9 független komponense van a főirányok rendszerében.

2.2.4. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium

Ashkenazi (1966, 1967, 1976), valamint Ashkenazi és Ganov (1972) a szilárdság jellemzésére az általános szilárdsági kritérium második és negyedik tagját tartotta meg annyi változtatással, hogy a jobb oldalon az egység helyett egy tetszőleges állandót választott.

$$a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} + a_{ijklmnop}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn}\sigma^{op} \le c \qquad i,j,k,l,m,n,o,p = L,R,T \qquad 2.8$$

a_{ijkl} – négydimenziós tenzor,

$a_{ijklmnop}$ – nyolcdimenziós tenzor,

c – tetszőleges skalár.

Ez a szilárdsági kritérium a feszültségek negyedik hatványát tartalmazza, a polinom tehát negyedfokú, az eddigi másodfokú közelítésekkel szemben. Joggal várhatjuk el tehát, hogy az Ashkenazi szilárdsági kritérium a valóságnak jobban megfelelve tudja leírni az anizotrop anyagok tényleges szilárdsági viselkedését. Azonban a négydimenziós tenzor $3^4 = 81$ és a nyolcdimenziós tenzor $3^8 = 6561$ komponensét még nem ismerjük. Az eddig alkalmazott eljárás, hogy egyszerű terheléseknek megfelelő feszültségi állapotok feszültségi komponenseit helyettesítjük a szilárdsági kritériumba és onnan fejezzük ki a keresett szilárdsági tenzor-komponenseket itt nem alkalmazható a komponensek roppant nagy száma miatt.

Ashkenazinak azonban sikerült a 2.8 kifejezést oly módon átalakítania (Ashkenazi 1966), hogy benne a szilárdsági tenzor komponensei a faanyag ún. technikai szilárdságaival fejezhetők ki. A 2.8-al egyenértékű kifejezés a következő alakot ölti:

$$a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \le \left| \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma^{ij}\delta_{ij}\right)^2 + \sigma^{ij}\sigma_{ij}\right]} \right| = \left| \sqrt{I_1^2 - I_2} \right|. \qquad i, j, k, l = L, R, T \qquad 2.9$$

Egyszerű átalakítás után (Szalai 1994) a következő kifejezés keletkezik:

$$\frac{a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}}{\left|\sqrt{I_1^2 - I_2}\right|} \le 1, \qquad i, j, k, l = L, R, T \qquad 2.10$$

ahol,

I_1, I_2 – az első és második feszültségi invariáns,

a_{ijkl} – az Ashkenazi-féle szilárdsági tenzor,

δ_{ij} – a Kronecker-delta.

Természetes faanyagra az Ashkenazi szilárdsági kritérium a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&a_{LLLL}\sigma^{LL}\sigma^{LL} + a_{RRRR}\sigma^{RR}\sigma^{RR} + a_{TTTT}\sigma^{TT}\sigma^{TT} + \\
&(a_{RRTT} + a_{TTRR})\sigma^{RR}\sigma^{TT} + (a_{LLTT} + a_{TTLL})\sigma^{LL}\sigma^{TT} + (a_{LLRR} + a_{RRLL})\sigma^{LL}\sigma^{RR} + \\
&(a_{RTRT} + a_{RTTR} + a_{TRRT} + a_{TRTR})\sigma^{RT}\sigma^{RT} + \\
&(a_{LTLT} + a_{LTTL} + a_{TLLT} + a_{TLTL})\sigma^{LT}\sigma^{LT} + \\
&(a_{LRLR} + a_{LRRL} + a_{RLLR} + a_{RLRL})\sigma^{RL}\sigma^{RL} \le \\
&\le \left|\sqrt{\begin{matrix}\sigma^{LL}\sigma^{LL} + \sigma^{RR}\sigma^{RR} + \sigma^{TT}\sigma^{TT} + \\ \sigma^{RR}\sigma^{TT} + \sigma^{LL}\sigma^{TT} + \sigma^{LL}\sigma^{RR} + \\ \sigma^{RT}\sigma^{RT} + \sigma^{LT}\sigma^{LT} + \sigma^{LR}\sigma^{LR}\end{matrix}}\right|
\end{aligned} \qquad 2.11$$

Meg kell azonban jegyezni, hogy célszerűbb a feszültségi invariánsokat tartalmazó képlet alkalmazása, mivel így nem kell felhasználnunk a Kronecker-deltát, ezáltal egyszerűsödnek a matematikai számítások.

2.3. A szilárdsági kritériumok tenzorkomponenseinek meghatározása

Az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelő tenzorok eltérő rendűek és szerkezetűek. A tenzorkomponensek meghatározási szabályai az egyes tönkremeneteli elméletek és a ható feszültségállapotok függvényei. A tenzorkomponensek meghatározásához mindhárom tönkremenetel esetében szükséges az adott fafaj technikai szilárdságainak ismerete. Technikai szilárdságnak nevezzük az egytengelyű húzó-, nyomó-, valamint nyíróigénybevétel alkalmazása során meghatározott szilárdsági értékeket. Tiszta nyíróigénybevétel előállítása nehéz ezért a nyírószilárdságot közvetett módon is meg lehet határozni (Szalai 1992). A Nyugat- magyarországi Egyetem Faipari Mérnöki Karának Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézetében több hazai lombos, valamint fenyő fafaj technikai szilárdságát határozták meg kísérleti mérések során (Szalai 1996, 1997, 1998, 1999, 2005; Garab és Karácsonyi 2010).

A tönkremeneteli elméletek alkalmazásához a következő technikai szilárdságokra van szükség, melyek kísérleti adatokból származnak.

Az anatómiai főirányokba eső húzó- és nyomószilárdságok:

$$f_L^+, f_L^-, f_R^+, f_R^-, f_T^+, f_T^-,$$

a fősíkok diagonális irányaiba eső húzó- és nyomószilárdságok:

$$f_L^+, f_L^-, f_R^+, f_R^-, f_T^+, f_T^-,$$

valamint a főirányokra merőleges síkokon ható nyírófeszültségekhez szükséges nyírószilárdságok:

$$t_{LR}, t_{LT}, t_{RT}.$$

A tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának kísérleti vizsgálatához lucfenyő (*Picea abies*) faanyagot használtunk, az ellenőrzéshez szükségünk lesz a lucfenyő technikai szilárdságaira, melynek rendszerét Szalai (2001) vizsgálatai alapján vettük fel:

2.1. táblázat: Lucfenyő húzószilárdságai (Szalai 2001).

	f_L^+	$f_{LR}^{T(45)+}$	f_R^+	$f_{LT}^{R(45)+}$	f_T^+	$f_{RT}^{L(45)+}$
Elemszám [db]	315	292	302	294	330	311
Átlag [MPa]	63,52	9,15	5,92	6,06	3,47	4,01
CoV [%]	23,62	28,59	28,18	22,86	30,12	20,61

2.2. táblázat: Lucfenyő nyomószilárdságai (Szalai 2001).

	f_L^-	$f_{LR}^{T(45)-}$	f_R^-	$f_{LT}^{R(45)-}$	f_T^-	$f_{RT}^{L(45)-}$
Elemszám [db]	319	325	291	309	274	305
Átlag [MPa]	49,34	9,08	3,49	12,91	7,05	3,67
CoV [%]	17,98	25,54	22,37	16,85	20,47	20,75

2.3. táblázat: Lucfenyő nyírószilárdságai (Szalai 2001).*

	t_{LR}	t_{LT}	t_{RT}
Átlag [MPa]	8,93	8,31	2,02
CoV [%]	20,00	20,00	20,00

* A nyírószilárdságokat közvetett módszerrel határozták meg

A következőkben bemutatjuk a kutatásunk során alkalmazott szilárdsági tenzorkomponensek meghatározási módjait az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelően.

2.3.1. A lineáris kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása

Lineáris közelítésnél a feszültségkomponenseknek csupán első fokú hatványait engedjük meg, így 2.1-ből csak az első tagot tartjuk meg. Kifejtve 2.1-et, a tönkremenetel határállapotában a következő reláció érvényesül:

$$a_{LL}\sigma^{LL} + a_{RR}\sigma^{RR} + a_{TT}\sigma^{TT} = 1. \qquad i, j = L, R, T \qquad 2.12$$

A három tenzorkomponens fizikai értelmét a következő gondolatmenettel kapjuk meg. Alkalmazzunk húzó- vagy nyomóigénybevételt, melynek hatására valamelyik anatómiai főtengellyel – pl. a rostiránnyal (*L*) – párhuzamosan lineáris feszültségi állapot ébred. A feszültségi állapot σ^{RR} és σ^{TT} komponense ilyenkor nulla. A külső terhelést folyamatosan növelve elérünk a test tönkremeneteléhez. A tönkremenetel pillanatában jelöljük a σ^{LL} normálfeszültség értékét f_L-el. Ennek az L jelű, rostirányú normálszilárdságnak ki kell elégítenie 2.12-t.

$$a_{LL} f_L = 1,$$

innen:

$$a_{LL} = \frac{1}{f_L}.$$

Tehát az a_{LL} szilárdsági tenzorkomponens az anyag rostirányú normálszilárdságának a reciproka, dimenziója ennek megfelelően a feszültségdimenzió reciproka. Teljesen analóg módon értelmezhetjük a másik két tenzorkomponenst. A lineáris kritérium tenzorkomponensei természetes faanyag esetén a következőképpen foglalhatók össze:

$$a_{ii} = \frac{1}{f_i^+} \text{ vagy} = \frac{1}{f_i^-}, \qquad i=L,\, R,\, T \qquad 2.13$$

ahol:

f_i^+ és f_i^- – a technikai szilárdságok a faanyag anatómiai főirányokban. A pozitív felső index a húzó-, a negatív felső index a nyomószilárdságot jelenti.

A lineáris szilárdsági kritérium a fentiek szerint 3 anyagjellemzőt tartalmaz. Az f_i^+ és az f_i^- jellemzők közül úgy kell kiválasztani a szükséges hármat, hogy azok felső indexe megegyezzen a tényleges feszültségi állapot normálfeszültség-komponenseinek előjelével. Azaz, ha pl. σ^{LL} és σ^{TT} nyomó-, σ^{RR} húzófeszültség, akkor f_L^-, f_T^- és f_R^+ jellemzőket kell alkalmazni.

2.3.2. A von Mises szilárdsági kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása

A von Mises szilárdsági tenzor komponenseit az előző fejezetben alkalmazott eljáráshoz hasonlóan határozhatjuk meg (Szalai 1994). Végeredményül a következőket kapjuk:

$$a_{iiii} = \frac{1}{\left(f_i^+\right)^2} \text{ vagy } a_{iiii} = \frac{1}{\left(f_i^-\right)^2}, \qquad i= L ,R,\, T \qquad 2.14$$

ahol,

f_i^+, f_i^- – húzó és nyomószilárdságok a faanyag főirányaiban.

$$\left(a_{ijij}+a_{ijji}+a_{jiij}+a_{jiji}\right)=\frac{1}{\left(t_{ij}\right)^2}, \qquad i, j = L, R, \text{ és } L, T, \text{ és } R, T \qquad 2.15$$

ahol,

t_{ij} – a faanyag nyírószilárdságai az anatómiai fősíkokban.

Az egyéb, nullával nem egyenlő tenzorkomponensek az ún. interaktív tenzorkomponensek. Meghatározásuk különböző módszerek segítségével történhet (Szalai 1994). Kutatásunkban a következőket alkalmaztuk:

$$\left.\begin{aligned}
\left(a_{iijj}+a_{jjii}\right)&=\frac{4}{\left(f_{ij}^{k(45)+}\right)^2}-\frac{1}{\left(f_i^{+}\right)^2}-\frac{1}{\left(f_j^{+}\right)^2}-\frac{1}{\left(t_{ij}^{+}\right)^2}\\
\left(a_{iijj}+a_{jjii}\right)&=\frac{4}{\left(f_{ij}^{k(45)-}\right)^2}-\frac{1}{\left(f_i^{-}\right)^2}-\frac{1}{\left(f_j^{-}\right)^2}-\frac{1}{\left(t_{ij}^{+}\right)^2}\\
\left(a_{iijj}+a_{jjii}\right)&=\frac{1}{(f_i^{+})^2}+\frac{1}{(f_j^{-})^2}-\frac{1}{(t_{ij}^{k(45)+})^2},\\
\left(a_{iijj}+a_{jjii}\right)&=\frac{1}{(f_i^{-})^2}+\frac{1}{(f_j^{+})^2}-\frac{1}{(t_{ij}^{k(45)-})^2}
\end{aligned}\right\} \quad i,j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T \qquad 2.16$$

ahol,

$f_{ij}^{k(45)+}$, $f_{ij}^{k(45)-}$, $t_{ij}^{k(45)+}$, $t_{ij}^{k(45)-}$ – húzó, nyomó, és nyírószilárdságok az anatómiai fősíkok szögfelezőjében. $t_{ij}^{k(45)+}$ és $t_{ij}^{k(45)-}$ értékét Szalai (1994)-ből használtuk fel.

2.3.3. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása

A Tsai-Wu tenzorok másod és negyedrendűek. Szalai (1994) alapján a tenzorkomponensek kapcsolata a technikai szilárdságokkal:

$$a_{ii}=\frac{1}{f_i^{+}}-\frac{1}{f_i^{-}}, \qquad i = L, R, T \qquad 2.17$$

$$a_{iiii}=\frac{1}{f_i^{+}f_i^{-}}, \qquad i = L, R, T \qquad 2.18$$

$$a_{ij}=\frac{1}{t_{ij}^{+}}-\frac{1}{t_{ij}^{-}}=0, \qquad i,j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,\ T \qquad 2.19$$

$$\left(a_{ijij}+a_{ijji}+a_{jiij}+a_{jiji}\right)=\frac{1}{t_{ij}^{+}t_{ij}^{-}}. \qquad i,j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T. \qquad 2.20$$

Az interaktív tenzorkomponenseket a következőképpen határozzuk meg:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(a_{iijj}+a_{jjii}\right)=\frac{4}{\left(f_{ij}^{k(45)+}\right)^{2}}\left[\begin{aligned}&1-\frac{f_{ij}^{k(45)+}}{2}\left(\frac{1}{f_i^+}-\frac{1}{f_i^-}+\frac{1}{f_j^+}-\frac{1}{f_j^-}\right)-\\&-\frac{\left(f_{ij}^{k(45)-}\right)^{2}}{4}\left(\frac{1}{f_i^+f_i^-}+\frac{1}{f_j^+f_j^-}+\frac{1}{t_{ij}^+t_{ij}^-}\right)\end{aligned}\right]\\
&\text{és,}\\
&\left(a_{iijj}+a_{jjii}\right)=\frac{4}{\left(f_{ij}^{k(45)-}\right)^{2}}\left[\begin{aligned}&1+\frac{f_{ij}^{k(45)-}}{2}\left(\frac{1}{f_i^+}-\frac{1}{f_i^-}+\frac{1}{f_j^+}-\frac{1}{f_j^-}\right)-\\&-\frac{\left(f_{ij}^{k(45)-}\right)^{2}}{4}\left(\frac{1}{f_i^+f_i^-}+\frac{1}{f_j^+f_j^-}+\frac{1}{t_{ij}^+t_{ij}^-}\right)\end{aligned}\right]
\end{aligned}\right\},\qquad 2.21$$

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{iijj}+a_{jjii})=-\frac{1}{(t_{ij}^{k(45)+})^{2}}\left[\begin{aligned}&1-t_{ij}^{k(45)+}\left(\frac{1}{f_i^+}-\frac{1}{f_i^-}+\frac{1}{f_j^+}-\frac{1}{f_j^-}\right)-\\&-(t_{ij}^{k(45)+})^{2}\left(\frac{1}{f_i^+f_i^-}+\frac{1}{f_j^+f_j^-}\right)\end{aligned}\right]\\
&\text{és,}\\
&(a_{iijj}+a_{jjii})=-\frac{1}{(t_{ij}^{k(45)-})^{2}}\left[\begin{aligned}&1+t_{ij}^{k(45)-}\left(\frac{1}{f_i^+}-\frac{1}{f_i^-}+\frac{1}{f_j^+}-\frac{1}{f_j^-}\right)-\\&-(t_{ij}^{k(45)-})^{2}\left(\frac{1}{f_i^+f_i^-}+\frac{1}{f_j^+f_j^-}\right)\end{aligned}\right]
\end{aligned}\right\}.\qquad 2.22$$

2.3.4. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium tenzorkomponenseinek meghatározása

Az Ashkenazi tenzor komponenseinek a meghatározása Szalai (1994) alapján a következők szerint történik:

$$a_{iiii} = \frac{1}{f_i^+} \text{ vagy } \frac{1}{f_i^-}, \qquad i = L, R, T \qquad 2.23$$

$$\left(a_{ijij} + a_{ijji} + a_{jiij} + a_{jiji}\right) = \frac{1}{t_{ij}}, \qquad i, j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T \qquad 2.24$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(a_{iijj} + a_{jjii}\right) = \dfrac{4}{f_{ij}^{k(45)+}} - \dfrac{1}{f_i^+} - \dfrac{1}{f_j^+} - \dfrac{1}{t_{ij}}, \\ \text{vagy} \\ \left(a_{iijj} + a_{jjii}\right) = \dfrac{4}{f_{ij}^{k(45)-}} - \dfrac{1}{f_i^-} - \dfrac{1}{f_j^-} - \dfrac{1}{t_{ij}}, \end{array}\right\} \qquad i, j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T \qquad 2.25$$

valamint,

$$\left.\begin{array}{l} \left(a_{iijj} + a_{jjii}\right) = \dfrac{1}{f_i^+} + \dfrac{1}{f_j^+} - \dfrac{1}{t_{ij}^{k(45)+}}, \\ \left(a_{iijj} + a_{jjii}\right) = \dfrac{1}{f_i^+} + \dfrac{1}{f_j^+} - \dfrac{1}{t_{ij}^{k(45)-}} \end{array}\right\}. \qquad i, j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T \qquad 2.26$$

2.3.5. A sűrűség és a nedvességtartalom hatásának figyelembe vétele a tenzorkomponensek számításánál

Az egyes szilárdsági tenzorok komponenseit lucfenyő faanyag technikai szilárdságaiból (Szalai 2001) számoltuk. Ezek a technikai szilárdságok 12%-os nedvességtartalomra és 0,46 g/cm^3 sűrűségre érvényesek.

Eberhardsteiner (2002) a méréseiben zömében 0,44-0,48 g/cm^3 sűrűségű lucfenyő faanyagot vizsgált 12%-os faanyag-nedvességtartalmi körülményekkel, ezért a Szalai (2001) által meghatározott technikai szilárdságok alkalmazása a tenzorkomponensek számítása során elfogadható. Az általunk végzett triaxiális nyomóvizsgálatok során öszszetört próbatestek sűrűségi, valamint a nedvességtartalmi értékeinek az átlaga a következők: ρ=0,39 g/cm^3 és u=13,9%. A mért értékek jelentősen eltértek Szalai (2001) által mért értékeitől ezért a technikai szilárdságokat módosítani kellett a tenzorkomponensek meghatározásához.

A nyomószilárdság változása a nedvességtartalom függvényében lineáris kapcsolatot mutat, valamint a húzószilárdság változása 12-14% nedvességtartalom között szintén lineárisnak kapcsolatnak tekinthető (Kollmann 1951). A nyírószilárdság és a nedvességtartalom közötti kapcsolatra kevés az irodalmi adat. A 12%-os nedvességtartalmi értékhez tartozó technikai szilárdságok különböző fajtáit a mért nedvességtartalomhoz tartozó technikai szilárdságra Kollmann szerint a következőképpen határozzuk meg:

$$f_u = f_{12}\frac{32-u}{20}\ , \qquad 2.27$$

ahol,

f_{12} – technikai szilárdság 12%-os nedvességtartalmi értéken,

f_u – technikai szilárdság a mért nedvességtartalmi értéken.

Azonos fafajú, de különböző sűrűségű faanyagok technikai szilárdságai is eltérnek egymástól. Mivel a faanyag sűrűsége és a szilárdsági jellemzők között a kapcsolat szintén lineáris (Kollmann 1951, Molnár 2004), ezért a következő egyszerű összefüggést alkalmaztuk, hogy átszámítsuk a technikai szilárdságokat a sűrűség függvényében:

$$f_\rho' = f_\rho\frac{\rho'}{\rho}\ , \qquad 2.28$$

ahol,

f_ρ – technikai szilárdság a Szalai (2001) által meghatározott sűrűségtartalmi értéken (ρ=0,46 g/cm^3),

$f_{\rho'}$ – technikai szilárdság a mért sűrűségtartalmi értéken.

2.4. A tönkremeneteli elméletek grafikus ábrázolása

A tönkremeneteli elméleteket nemcsak matematikailag lehet leírni, hanem – bizonyos feltételek mellett – geometriai eszközökkel is tudjuk modellezni. A különböző szilárdsági kritériumok polinomjai a feszültségek hat dimenziós terében egy hiperfelületet, egy ún. szilárdsági felületet képeznek. A szilárdsági felület mindazon pontok halmaza a térben, amelyeknek megfelelő feszültségi állapot komponensei kielégítik a szilárdsági kritérium egyenletét, azaz a szilárdsági felületnek megfelelő feszültségállapotok éppen tönkremeneteli határállapotot okoznak.

A legnagyobb gondot az okozza, hogy a szilárdsági felület hat dimenziós ábrázolására sajnos nincsen mód. Azonban, ha a ható feszültségi állapot síkbeli, akkor képesek vagyunk megszerkeszteni a szilárdsági felületet. Esetünkben azonban a síkbeli feszültségi állapot fogalmát kicsit szűkítenünk kell. Mivel anizotrop anyagnál minden feszültségi állapotot a szimmetriatengelyek rendszerére kell transzformálnunk, a szilárdság szempontjából csak azok a feszültségi állapotok tekinthetők síkbelinek, amelyek síkja az anyag valamelyik szimmetriasíkjába esik.

Általánosan anizotrop anyag esetén:

$$\sigma^{ii}, \sigma^{jj}, \sigma^{ij} = \sigma^{ji}. \qquad i, j = 1,2 \text{ és } 1,3 \text{ és } 2,3 \qquad 2.29$$

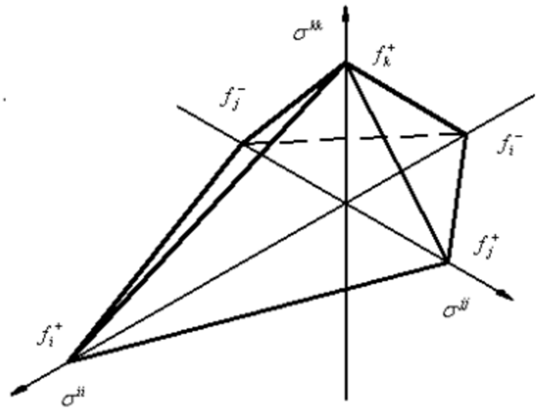
Természetes faanyag esetén a futóindexek megegyeznek az anatómiai főirányokkal, azaz $i, j = L,R$ és L,T és R,T.

A szilárdsági felület könnyebb ábrázolása szempontjából célszerű a tönkremeneteli elméletnek megfelelő szilárdsági kritériumból (2.2, 2.4, 2.6, 2.8) a σ^{ij} nyírófeszültség komponens kifejezése. Ez esetben egy $\sigma^{ij} = f(\sigma^{ii}, \sigma^{jj}, a_{ij}, a_{ijkl})$ alakú függvényt kapunk, amelyben független változóként a két normálfeszültség szerepel. Miután rendelkezésünkre áll a függvény, lehetőségünk nyílik a szilárdsági felület ábrázolására.

A továbbiakban bemutatjuk az anizotrop tönkremeneteli elméleteknek megfelelő szilárdsági felületeket, kiemelve jellegzetes tulajdonságaikat, előnyeiket valamint hátrányaikat.

2.4.1. A lineáris szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása

Lineáris közelítésnél a feszültségkomponenseknek csupán az első fokú hatványait engedjük meg, így a felületet síklapok képezik (2.1. ábra). Már korábban beláttuk, hogy a lineáris kritérium nem tükrözi hűen a faanyag tönkremenetelét, ezért nem is alkalmazzák. A kritérium bemutatása azonban az egymásra épülő elméletek miatt célszerű.



2.1. ábra: Lineáris kritérium szilárdsági felülete.

2.4.2. A von Mises szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása

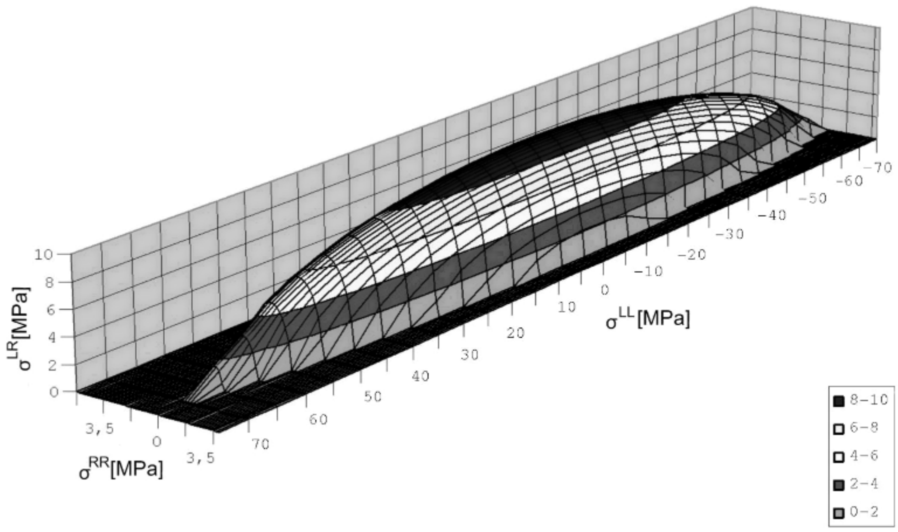
Von Mises (1928) a kiinduló szilárdsági kritérium második tagját tartotta meg (2.4). Mivel a szilárdsági tenzor komponensei a második hatványon vannak ezért a szilárdsági felület egy másodrendű felület, egy ellipszoid (2.2. ábra). Feltehető, hogy egy másodrendű felület jobban tükrözi a tönkremenetel pillanatában ható feszültségi állapotot, mint egy síklapokkal határolt felület.

Kifejezve 2.4-ből a nyírófeszültség komponenst megkapjuk:

$$\sigma^{ii} = \sqrt{\frac{1 - a_{iiii}\sigma^{ii}\sigma^{ii} - a_{jjjj}\sigma^{jj}\sigma^{jj} - (a_{iijj} + a_{jjii})\sigma^{ii}\sigma^{jj}}{a_{ijij} + a_{ijji} + a_{jiij} + a_{jiji}}}\,.$$

$$i, j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T \qquad 2.30$$

Ábrázolva a faanyag tönkremenetelét von Mises szerint a szilárdsági felület a 2.2. ábra szerint alakul.



2.2. ábra: Lucfenyő szilárdsági felülete az LR síkban a von Mises szerint.

2.4.3. A Tsai-Wu szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása

Tsai és Wu (1971) a szilárdsági kritérium első két tagját tartotta meg (2.6). A szilárdsági tenzor komponensei az első valamint a második hatványon szerepelnek, ezért a szilárdsági felület szintén egy ellipszoid. Azonban az ellipszoid helyzete változott a von Mises-féle felülethez képest.

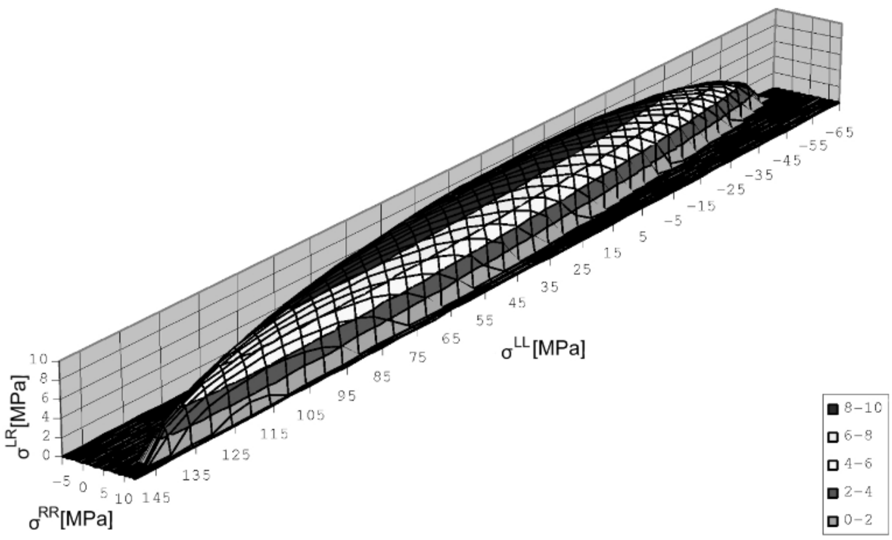
A Tsai-Wu tönkremeneteli felület (2.3. ábra) egy olyan ellipszoid, amelynek helyzete elforgatott a szimmetriatengelyekhez képest, ráadásul a szilárdsági felület eltolt az origóhoz viszonyítva, azaz a középpontja nem egyezik meg a szimmetriatengelyek metszéspontjával.

Kifejezve 2.6-ból a nyírófeszültség komponenst megkapjuk:

$$\sigma^{ii} = \sqrt{\frac{1 - a_{ii}\sigma^{ii} - a_{jj}\sigma^{jj} - a_{iiii}\sigma^{ii}\sigma^{ii} - a_{jjjj}\sigma^{jj}\sigma^{jj} - (a_{iijj} + a_{jjii})\sigma^{ii}\sigma^{jj}}{a_{ijij} + a_{ijji} + a_{jiij} + a_{jiji}}} \qquad 2.31$$

$i, j = L,R$ vagy L,T vagy R,T

A Tsai-Wu tönkremeneteli elmélettel illesztett felület az 2.3. ábrának megfelelő alakot veszi fel.



2.3. ábra: Lucfenyő szilárdsági felülete az LR síkban a Tsai-Wu elmélet szerint.

2.4.4. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium grafikus ábrázolása

Ashkenazi (1966) a kezdeti polinom második és negyedik tagját tartotta meg (2.8). A szilárdsági felület egy negyedrendű felület lesz. Ez azért fontos, mert a felület nemcsak domború, hanem homorú részeket is tartalmazhat (2.4. ábra), ezáltal kedvezőbben írja le a faanyag tönkremenetelét a többi elmélethez képest. Ashkenazi elmélete tehát lényegesen változatosabb felületalakot eredményez, ugyanakkor ugyanazt a kilenc technikai szilárdságot használja fel, mint a többi elmélet.

Síkbeli feszültségi állapot esetén 2.8 egyszerűsödik:

$$\left[a_{iiii}(\sigma^{ii})^2 + a_{jjjj}(\sigma^{jj})^2 + (a_{iiii} + a_{jjii})\sigma^{ii}\sigma^{jj} + (ai_{jij} + a_{ijji} + a_{jiij} + a_{jiji})(\sigma^{ij})^2\right]^2 -$$
$$-(\sigma^{ii})^2 - (\sigma^{jj})^2 - \sigma^{ii}\sigma^{jj} - (\sigma^{ij})^2 = 0$$

2.32

Hosszas átalakítás, valamint elemi matematikai műveletek sorozata után megkapjuk 2.8.-ból a nyírófeszültség komponenst (Szalai 1994):

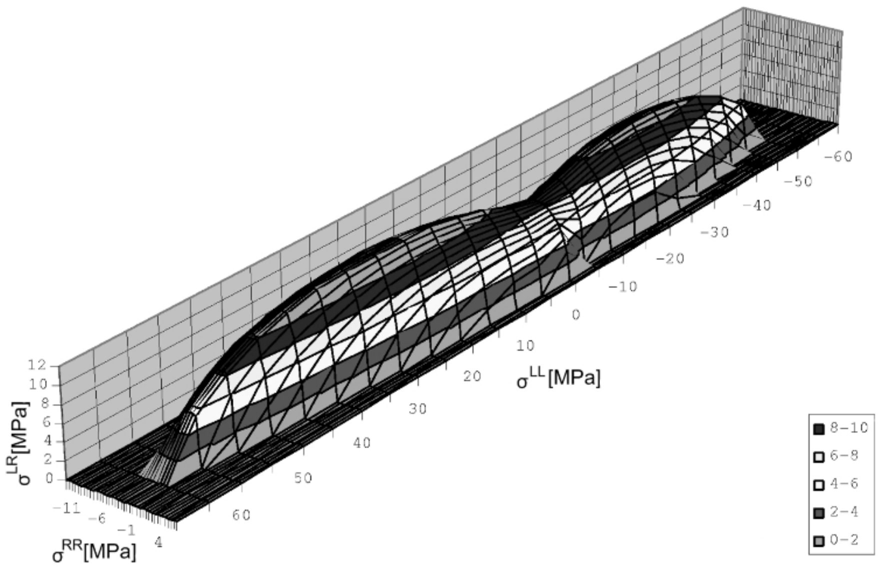
$$\sigma^{ij} = \pm\sqrt{\frac{1}{q_{ij}}\left[\frac{1}{2q_{ij}} - a_{iiii}(\sigma^{ii})^2 - a_{jjjj}(\sigma^{jj})^2 - (a_{iijj} + a_{jjii})\sigma^{ii}\sigma^{jj} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_{ij}^2} - \left(\frac{a_{iiii}}{q_{ij}} - 1\right)(\sigma^{ii})^2 - \left(\frac{a_{jjjj}}{q_{jj}} - 1\right)(\sigma^{jj})^2 - \left(\frac{a_{iijj} + a_{jjii}}{q_{ij}} - 1\right)\sigma^{ii}\sigma^{jj}}\right]},$$

2.33

ahol,

$q_{ij} = a_{ijij} + a_{ijji} + a_{jiij} + a_{jiji}$.   *i, j = L,R* és *L,T* és *R,T*

Ezután ábrázolhatjuk a tönkremeneteli felületet. Az 2.4. ábrán egyértelműen kirajzolódik, hogy a tönkremenetel pillanatában milyen feszültségi állapot uralkodik a faanyagban.



2.4. ábra: Lucfenyő szilárdsági felülete az LR síkban az Ashkenazi elmélet szerint.

Mivel síkbeli feszültségállapot esetén a tönkremenetelt grafikusan is tudjuk ábrázolni, ezért az ábráról eldönthető, hogy a modellezett tönkremenetelhez képest a kísérleti tönkremeneteli feszültségi állapotunk hogyan viszonyul. Ha a vizsgált feszültségi képpontunk a szilárdsági felület felett helyezkedik el, akkor a faanyag valódi törése a tönkremeneteli elmélettel meghatározottnál nagyobb feszültségeken történik. Abban az esetben, ha a képpont a szilárdsági felület alá esik, akkor elméletileg még nincs tönkremenetel, jóllehet a kísérleti eredménye törést eredményez. Ha az a határeset következik be, hogy a vizsgált képpontunk rajta van a szilárdsági felületen akkor a gyakorlati érték tökéletesen alátámasztja a tönkremeneteli elméletben meghatározottakat. Természetesen ez a faanyag tulajdonságaiból fakadóan nem teljesülhet mindig. A faanyag mindig rendelkezik természetes változékonysággal, így a statisztikai kiértékelésnél ezt figyelembe kell venni.

3. Anizotrop tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának vizsgálata

A faanyag és faalapú anyagok fizikai-mechanikai tulajdonságai a makroszkopikus szinten ortogonálisan anizotrop. A szilárdsági méretezéseket csak megfelelő tönkremeneteli elmélet alkalmazása mellett lehet elvégezni. A tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságát azonban alá kell támasztani, mind elméleti megfontolások segítségével, mind gyakorlati vizsgálatokkal. Az elméleti megközelítéseket Szalai (1994, 2008) alapján mutatjuk be. Meg kell jegyezni, hogy fontos áttekintő munkát végzett a témakörben Kasal és Leichti (2005).

Az eltérő tönkremeneteli elméleteknek megfelelő szilárdsági kritériumok valamelyik anyagra való alkalmazhatóságát az alapján kell eldöntenünk, hogy az elmélet előrejelzései mennyire vannak összhangban az adott anyagfajtán végzett kísérletek eredményeivel. Elméleti megfontolások alapján azonban lehetséges, hogy előre kiválasszuk a sokféle szilárdsági kritérium közül azt, amelyik egy anyagfajta tönkremenetelét a legjobban leírja. Az ilyen előzetes elméleti vagy gyakorlati tapasztalatokon nyugvó kiválasztás sokszor lényegesen csökkentheti a költséges és olykor igen bonyolult kísérleti vizsgálatok nagy számát.

A következőkben több elméleti szempont alapján elemezzük a tönkremeneteli elméleteket figyelembe véve, hogy mennyire tükrözik hűen a természetes faanyag viselkedését. Az elméleti szempontok bemutatása után a kísérletek elvégzését indokoljuk.

3.1. A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása a normálszilárdságok iránytól való függése alapján

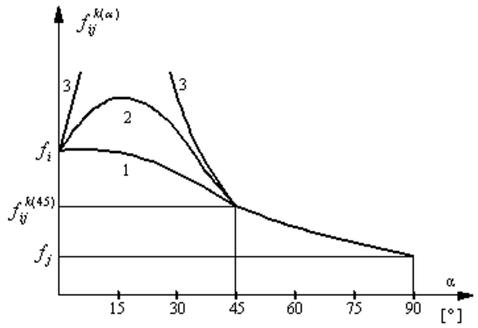
A normálszilárdság iránytól függő változását megadó függvények jellegzetességei alapján megszabhatunk olyan feltételeket bizonyos technikai szilárdságok között, melyek lehetővé teszik annak eldöntését, hogy melyik töréselmélet a legalkalmasabb az adott anyagfajta szilárdsági viselkedésének leírására.

Faanyagnál és sok mesterségesen kialakított ortotrop anyagnál (pl. kompozitok) többnyire létezik egy olyan főirány, melynek normálszilárdsága lényegesen nagyobb, mint a másik két főirányhoz tartozó. Természetes faanyagon végzett kísérletek azt mutatják, hogy

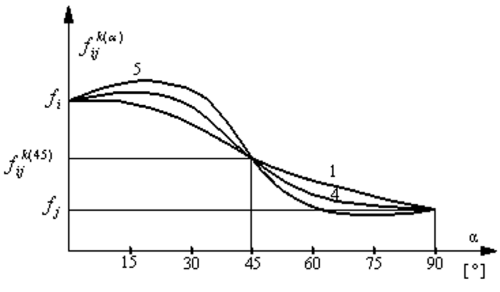
$$f_i \geq f_{ij}^{k(\alpha)} \geq f_j . \qquad i, j = L,R, \text{ vagy } L,T \qquad 3.1$$

Ebből az következik, hogy a normálfeszültségek szélsőértékei az anatómiai főirányokba esnek. A két kisebb szilárdságnak megfelelő irányok síkjában – faanyagnál *RT* síkban – a fenti relációnak nem feltétlenül kell teljesülnie. Függvényvizsgálatok sora után arra a következtetésre juthatunk, hogy a három szilárdsági kritériumból kiszámított *i, j* irányok közti ferde síkokon ébredő normálszilárdságok értékei, és a mért szilárdsági értékek egy szögtartományon belül jelentős eltérést mutathatnak. A függvényvizsgálatok arra vezettek, hogy az eltérés oka az $f_{ij}^{k(45)}$ technikai szilárdság értékében rejlik. Kimutatható, hogy ha $f_{ij}^{k(45)}$ értéke egy bizonyos tartományon kívülre esik, akkor az elmélet nem írja le helyesen a normálszilárdság orientációs változását. Ha a tényleges technikai szilárdság a kijelölt határok közé esik, a normálszilárdság függvényének a 0°<α<90° szögtartományon nem lesz szélső értéke.

Ha $f_{ij}^{k(45)}$ kisebb, mint az alsó határérték, a függvény-görbének 45° és 90° között minimuma van (3.2. ábra 4-es és 5-ös görbéje), ha nagyobb, mint a felső határértéke, 0° és 45° között maximuma, esetleg a végtelenbe ugró értéke lesz (3.1. ábra 2-es és 3-as görbéje).



3.1. ábra: Szöget bezáró normálszilárdságok változása (maximum helyek).



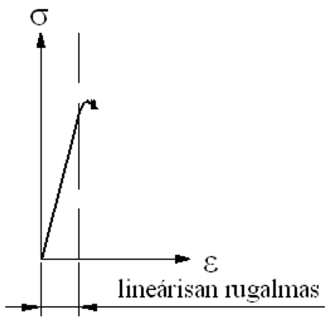
3.2. ábra: Szöget bezáró normálszilárdságok változása (minimum helyek).

Szalai (1994) kimutatta, hogy az $f_{ij}^{k(45)}$ megengedhető eltérésének tartománya a három tönkremeneteli elmélet közül az Ashkenazi-félében a legnagyobb. Az Ashkenazi elmélet tehát sokkal kevésbé függ $f_{ij}^{k(45)}$ kísérletben meghatározott értékének esetleges hibájától.

Összefoglalva elmondható, hogy míg az Ashkenazi elmélet helyességét nem érinti számottevően az $f_{ij}^{k(45)}$ normálszilárdságok változása, addig a von Mises és a Tsai-Wu elmélet érzékenyen reagál ezeknek az anyagjellemzőknek a tényleges (mért) értékére, ill. hibájára.

3.2. A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása energetikai alapon

Természetes faanyag esetén az alakváltozási jelleggörbe a törés bekövetkezéséig– abszolút száraz állapottól a rosttelítettségi nedvességtartalomig – gyakorlatilag lineáris (3.3. ábra), vagy egy olyan hatványfüggvénnyel közelíthető, amely csak a törési alakváltozás közelében görbül meg kis mértékben. Rideg törés esetén a képlékeny anyagra jellemző nagy alakváltozás nem lép fel és az alakváltozási folyamat egészen a tönkremenetelig rugalmasnak tekinthető.



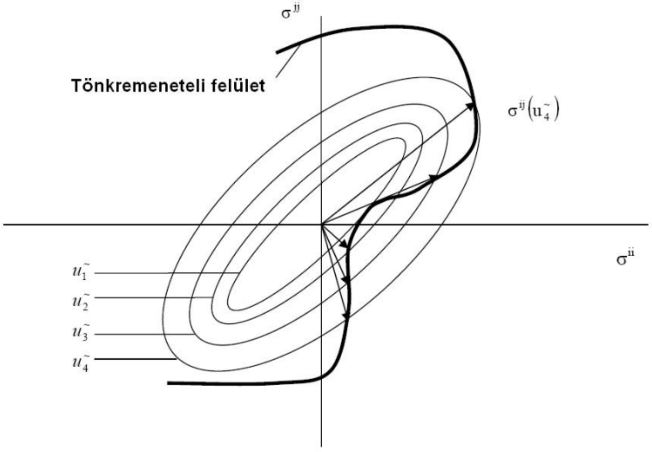
3.3. ábra: Faanyag alakváltozási jelleggörbéje.

Lineárisan rugalmas anyagnál minden törési feszültségi állapotnak megfelelő képpont a 3.2-vel megadott kiegészítő rugalmas potenciálnak megfelelő ellipszoidra esik:

$$\tilde{U} = \int d\tilde{U} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma^{ij} = \frac{1}{2}s_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} = \Omega \qquad i,j = L,R \text{ és } L,T \text{ és } R,T \qquad 3.2$$

Amíg bekövetkezik a tönkremenetel, addig a rugalmas alakváltozást az Ω kiegészítő rugalmas potenciál határozza meg. Folyamatosan növelve egy adott feszültségi állapot komponenseit a normalitás és a konvexitás törvénye a tönkremenetelig fennáll.

Azonban anizotrop anyag esetén a különböző feszültségi állapotokhoz különböző nagyságú $\Omega = c_k$ (k= 1, 2…) felületek tartoznak. Izotrop anyag esetén nincsen iránytól való függés. Itt a szilárdsági felület egyetlen egy ellipszoid, azaz mindenhol konvex. Anizotrop anyagnál azonban minden orientációhoz különböző kiegészítő potenciál, azaz különböző nagyságú ellipszoid tartozhat. A tönkremenetelhez tartozó feszültségi képpontok összessége alkotja a rideg anyagok szilárdsági felületét, s ez bármilyen alakot felvehet. Ezt mutatja be az 3.4. ábra, ha a feszültségi állapot síkbeli.



3.4. ábra: A faanyag szilárdsági felülete. Rideg, anizotrop anyagok tönkremeneteli felülete (síkbeli feszültségi állapotot felételezve) domború és homorú részeket is tartalmazhat.

Anizotrop anyag esetén így a szilárdsági felület nem feltétlenül konvex. Az 3.4. ábrán látható módon a tönkremeneteli feszültségi képpontok különböző ellipszoidokon fekszenek, de a tönkremenetelhez tartozó képpontok által alkotott felület konvex és konkáv részeket egyaránt tartalmazhat. A tönkremenetel pillanatában a Drucker-féle stabilitási feltétel nem érvényes, hiszen megszűnik az anyag folytonossága, és a $d\varepsilon_{ij} d\sigma^{ij}$ szorzat fizikailag értelmét veszti. Ezzel elméletileg is belátható az a kísérleti tapasztalat, hogy faanyag esetén a tönkremeneteli felület egyes részei homorú alakot is felvehet. Korábban bemutattuk, hogy a három szilárság elmélet közül egyedül az Ashkenazi-féle képes homorú felületrészekkel rendelkezni (a von Mises és a Tsai-Wu elmélet mindig ellipszoid, azaz konvex), így a három elmélet közül a faanyag számára gyakorlatilag csak az Ashkenazi-féle jöhet szóba.

A tönkremeneteli elméleteket energetikailag vizsgálva arra a következtetésre jutunk, hogy a von Mises és a Tsai-Wu elmélet szerint értelmezett kiegészítő potenciál egy állandó érték:

$$f_L\left[a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\right]=f_L \quad , \tag{3.3}$$

$$f_L\left[a_{ij}\sigma^{ij}+a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\right]=f_L \, . \tag{3.4}$$

Ezzel szemben az Ashkenazi szilárdsági kritérium az egyedüli elmélet, amely szerint a kiegészítő potenciális energia nem egy állandó érték, hanem mindig függ a ható feszültségi állapot orientációjától:

$$\left[a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\right]=\sqrt{I_1^2-I_2}\,, \qquad i, j, j, l= L, R, T \tag{3.5}$$

ahol,

I_1 – az első feszültségi invariáns,

I_2 – a második feszültségi invariáns.

A kiegészítő potenciál állandósága csak izotrop anyagnál igaz. Anizotrop anyag esetén egyértelmű, hogy a különböző orientációk esetén a törésig felhalmozott kiegészítő potenciális energia más és más. Ez a tény is az Ashkenazi-féle tönkremeneteli elmélet helyességét igazolja, sőt azt kell megállapítanunk, hogy a kiegészítő potenciális energia egyenlőségét hirdető másik két elmélet elvileg helytelen.

3.3. A tönkremeneteli elméletek összehasonlítása kísérleti adatok alapján

A három szilárdsági kritérium (von Mises, Tsai-Wu, Ashkenazi) közül az Ashkenazi elmélet látszik megfelelőnek az elméleti megfontolások után. Azonban egy elmélet akkor jó, ha a gyakorlat igazolja. Ezért kísérletekkel kell alátámasztani az egyes tönkremeneteli elméletek helyességét. Olyan mérésekből származó feszültségértékekre van szükségünk, melyek segítségével a tönkremeneteli elméleteket ellenőrizhetjük alkalmazhatóságuk szempontjából. Feladatunk síkbeli, és térbeli feszültségállapotok létrehozása, majd a keletkezett feszültségértékek segítségével a tönkremeneteli elméletek ellenőrzése.

Ellenőrzött összetett feszültségállapotok létrehozása nem könnyű feladat. A kéttengelyű (biaxiális) kísérleteket Eberhardsteiner (2002) munkásságából vettük át, így a kísérleteket nem kellett nekünk elvégezni. Eberhardsteiner professzor a rendelkezésünkre bocsátotta a mérési adatait, így azokat további kutatási célból hasznosítani tudtuk.

A triaxiális kísérleteket pedig az Ernst Mach Stipendium keretein belül, a Bécsi Műszaki Egyetem Mechanika Intézetének (*TU Vienna, Institute for Mechanics of Materials and Structures, IMWS*) laboratóriumában hajtottuk végre, szintén Eberhardsteiner professzor úr irányítása mellett.

4. A kísérletek bemutatása

4.1. A kísérletek célja

A kísérletek célja az volt, hogy lucfenyő próbatesteken kontrollált, összetett feszültségi állapotokat hozzunk létre, amelyek segítségével a tönkremeneteli elméleteket ellenőrizni tudjuk. A szakirodalom már foglalkozott olyan kísérletekkel, melyek a faanyagot úgy terhelték, hogy azon összetett feszültségi állapot uralkodjon.

Yamasaki-Sasaki (2003, 2004) a rugalmas és a tönkremeneteli tulajdonságokat vizsgálta húzó-csavaró, kombinált terhelés esetén. Sasaki és tsai. (2002, 2004, 2005, 2007) pedig pulzáló húzó-csavaró terhelést is alkalmazott, hogy vizsgálják a faanyag mechanikai viselkedését összetett, dinamikus terhelés alatt.

Ehlbeck és Hemmer (1986) az erdei fenyő (*Pinus sylvestris*), a douglasfenyő (*Pseudotsuga menziesii*), a jegenyefenyő (*Abies alba*) és a lucfenyő szilárdsági viselkedését tanulmányozta összetett feszültségi állapotban. Igen bonyolult eljárással 10 cm átmérőjű 2 mm falvastagságú csöveket készítettek, amelyeket a cső hosszirányában normál- és csavaróigénybevételnek, valamint belső nyomásnak tettek ki. Ilyen módon a cső falában bonyolult, összetett feszültségi állapotot tudtak létrehozni. A tönkremenetelig terhelt próbatestek kritikus feszültségállapotát a Tsai-Wu féle szilárdsági elmélettel ellenőrizték. Vizsgálataik célja azonban nem a szilárdsági elmélet ellenőrzése volt, azt adottnak és helyesnek tételezték fel. A Tsai-Wu elméletet inkább arra használták fel, hogy segítségével következtetéseket vonjanak le az általuk vizsgált négy fafaj szilárdsági viselkedéséről. Szalai Professzor Úr doktori védésére (Szalai 2000, személyes beszélgetés alapján) elkészítette az Ehlbeck és Hemmer által közzé adott szilárdsági állapotokra a Tsai-Wu és az Ashkenazi elmélet alkalmazhatósági vizsgálatát. Az összehasonlítás eredménye az lett, hogy a két tönkremeneteli elmélet között nem adódott értékelhető különbség. Ennek oka feltehetőleg az volt, hogy az Ehlbeck és Hemmer által elvégzett kísérletekben nem voltak szélsőséges feszültségállapotok, illetve a felhasznált kísérleti adatok száma alig érte el a fél tucatot.

Eberhardsteiner (2002) biaxiális terheléssorozatot hajtott végre lucfenyő faanyagon. A kísérletek során 423 próbatestet törtek össze. Eredményként, a tönkremenetel pillanatában uralkodó összetett feszültségi állapotot határozták meg. Mivel a Nyugat-magyarországi Egyetem Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézete valamint a Bécsi Műszaki Egyetem Mechanika Intézete között már több évtizede szakmai kapcsolat van, Eberhardsteiner professzor úr a rendelkezésünkre bocsátotta a mérési adatait, így mi azokkal tovább tudtunk dolgozni és meg tudtuk vizsgálni az anizotrop tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságát biaxiális feszültségállapot esetén.

A tönkremeneteli elméleteket azonban térbeli feszültségállapot esetén is le akartuk ellenőrizni, ezért szükségünk volt a tönkremenetel pillanatában uralkodó térbeli feszültségállapotokra is. Ezért olyan kísérleteket kellett végrehajtanunk, melyek eredményeként kontrollált térbeli feszültségállapotok jöttek létre a törés pillanatában. Lehetséges megoldásként kínálkozott a triaxiális nyomóterhelés, mint kísérlettípus, amivel térbeli feszültségállapotot lehet létrehozni.

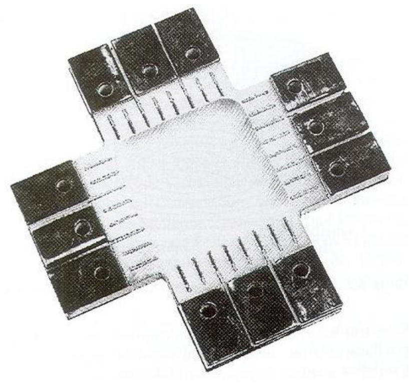
Triaxiális nyomóterhelést azonban eddig még csak ritkán alkalmaztak faanyagon. Saliklis és tsai. (1998) a faanyagot multiaxiális nyomóterhelés esetén tesztelte. Lineáris nyomóvizsgálatot alkalmaztak úgy, hogy a faanyag keresztirányú alakváltozásait meggátolták, ezáltal a passzív irányokban is keletkezett nyomóterhelés. Az eredmények azonban azt mutatták, hogy ha hasáb alakú próbatestet terhelünk, akkor ismeretlen nagyságú súrlódóerő jelentkezik, és helyi tönkremenetelek alakulhatnak ki a teherátadás környezetében. Meg kell jegyezni, hogy hasonlókra jutott Vágó (2005) is.

Megoldást jelenthet a geotechnikában alkalmazott triaxiális nyomócellák alkalmazása, melyet beton- és talajvizsgálatok során alkalmaznak (pl. Bongers és Rutten 1998, Sfer és tsai. 2002, Elkadi és van Mier 2006). Ezért a választásunk erre az eszközre esett. A kísérleteket mi végeztük el Bécsben, a korábban bemutatott intézet laboratóriumában.

4.2. A biaxiális törővizsgálatok bemutatása

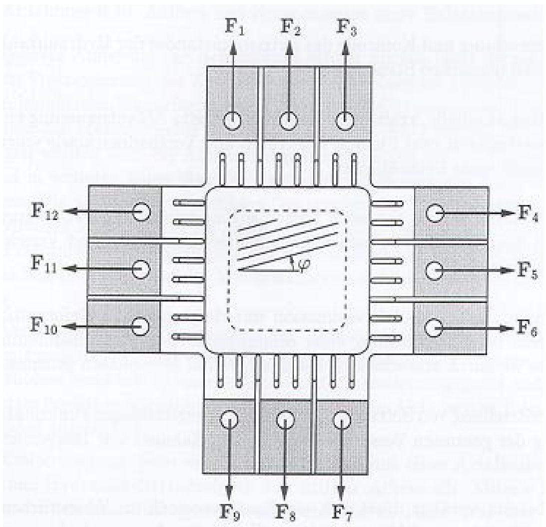
A Bécsi Műszaki Egyetem Mechanika Intézetében speciálisan kialakított lucfenyő próbatesteken szervo-hidraulikus, biaxiális törőgéppel roncsolásos, terheléses vizsgálatokat hajtottak végre.

A próbatestek kialakításához véges-elem analízist alkalmaztak. Az ideális formát egy kereszt alakban találták meg. A középső négyzet alakú terület jól láthatóvá teszi az évgyűrűszerkezetet, és a majdani törési képet (4.1. ábra). A testet a vizsgált rostlefutási iránynak megfelelően vágták ki a rönköknek az évgyűrűszerkezetnek megfelelő részeiből, így a próbatest rostlefutási irányai a vízszinteshez képest: φ=0° (*L*); 7,5°; 15°; 30°; 45°. A CNC megmunkálást követően a próbatesteket 20 °C hőmérsékleten, 65%-os páratartalmon tárolták, míg a faanyag nedvességtartalma közelítőleg 12%-os lett.



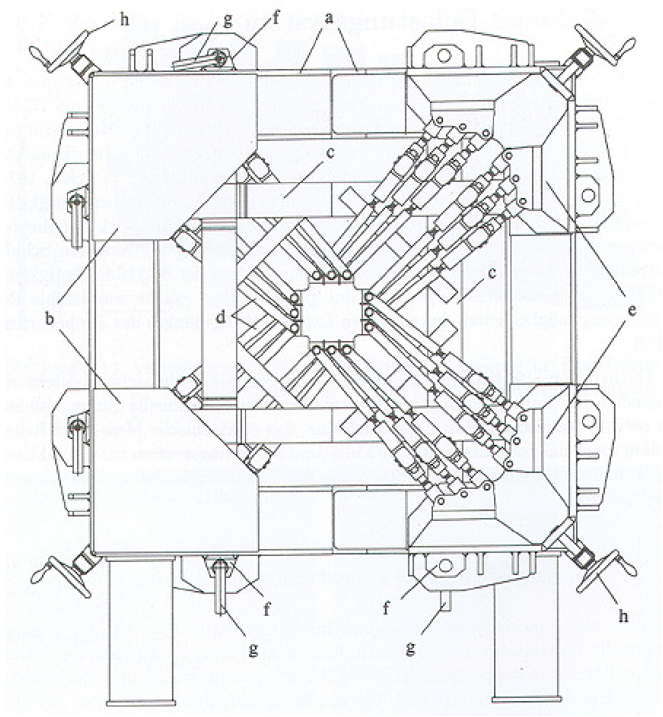
4.1. ábra: A lucfenyő próbatest kialakítása biaxiális terheléshez.

A vizsgálóberendezésben a megfogást a próbatest peremének a kialakítása segítette elő. Az így elkészített próbatesteket a 4.2. ábrának megfelelő módon terhelték.



4.2. ábra: Lucfenyő próbatest biaxiális terhelése.

A biaxiális terhelést egy speciális, egyedi kivitelezésű, a Bécsi Műszaki Egyetemen gyártott, kéttengelyű szakítóvizsgálatokra kifejlesztett mérőműszerrel végezték, amely egyedülálló Közép-Európában. A berendezés három fő egysége a szervó-hidraulikus terhelési berendezés, a számítógép által vezérelt szabályozórendszer, valamint az automata digitális mérő-regisztráló egység. A kifejlesztett mechanikus gép szerkezeti vázát a 4.3. ábra mutatja be.



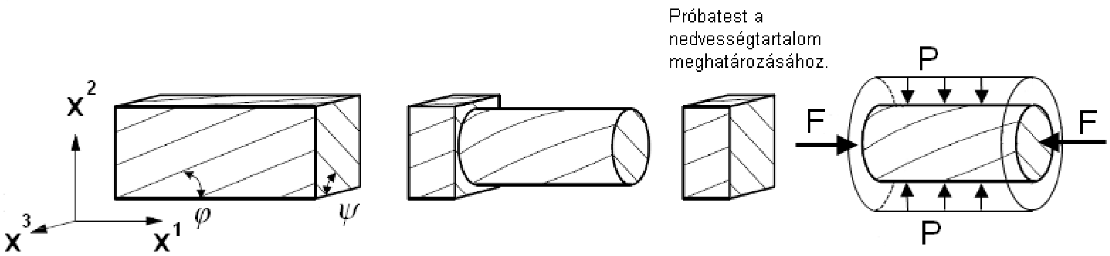
4.3. ábra: A terhelőberendezés felépítése. a) duplafalú acélváz b) merevítő fedél c) merevítő keret d) terhelő tengelyek e) rögzítő modulok f) fékezőcsapok g) összekötő tengelyek h) beállító kerék.

Az ábrán látható, hogy a terhelést 24 db V-formájú páros munkahenger és 12 db csap adta át a faanyagra, így a terhelés gyakorlatilag egyenletes eloszlásúnak tekinthető. A gépészeti kivitelezésnek köszönhetően a próbatesteket megfelelően tudták pozícionálni, így a feszültségi eloszlás a feltételezettnek megfelelően alakult. A vezérlést egy általuk kifejlesztett szoftver segítségével végezték, mely figyeli a hidraulika által működtetett terhelést és automata erőbeállítást végez. Továbbá, ellenőrzi a terhelési pontokat, valamint felügyeli az optikai alakváltozás-mérést. A faanyag terheléséből keletkező alakváltozásait egy speciális optikai mérőműszer figyelte. A szemcseképes interferometrián (*Electronic Speckle Interferometry)* alapuló berendezés képes háromdimenziós alakváltozás-mérésre, ezáltal nyomon követi a próbatest változásait a terhelés függvényében.

4.3. A triaxiális törővizsgálatok bemutatása

A tönkremeneteli elméletek ellenőrzéséhez szükségünk volt általános térbeli feszültség-állapotokra is, ezért triaxiális nyomóvizsgálatokat hajtottunk végre lucfenyő faanyagon egy szervo-hidraulikus triaxiális törőberendezéssel.

A törőberendezés hidraulikus oldalnyomással működik, ezért csak hengeres próbatestek tesztelésére alkalmas. Hasáb alakú próbatest terhelésére nem megfelelő. A triaxiális nyomóvizsgálatokhoz tehát hengeres próbatesteket készítettünk lucfenyő pallókból. A próbatest kialakított végső geometriája 50 mm-es átmérővel 100 mm-es magassággal rendelkező fahenger (4.4. ábra) volt, amelyet a tönkremenetelig terheltük triaxiálisan.

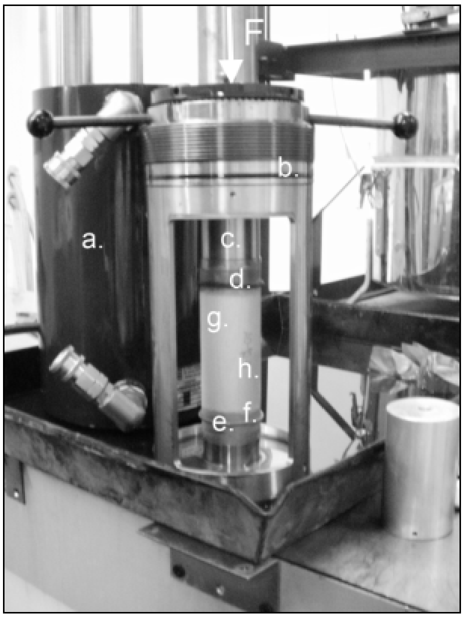


4.4. ábra: A próbatest elkészítése, orientációja valamint az alkalmazott terhelési irányok. Háromfajta rostirányú lécet vágtunk ki a pallókból (φ=0°[L], 22°,45°) és az évgyűrűállás (ψ) 0°(T)-90°(R) tartományon belül változott. A lécek keresztmetszete 60x60 mm volt. Ezután az 50 mm-es átmérőt esztergáltuk ki. Végül a hasáb alakú véget levágtuk, majd belőle meghatároztuk nedvességtartalmat. Az axiális terhelés iránya (F) az x^1 tengely, míg az oldalnyomás (P) az x^2-x^3 síkban ébredt.

A próbatestek körülbelül egyforma évgyűrű szélességgel rendelkeztek, és a külső gesztből lettek kivágva, azaz az ortogonális anizotrópiát feltételezni lehet. Azokat a próbatesteket nem törtük össze, melyek jelentősebb fahibákat tartalmaztak. Azonban meg kell jegyezni, hogy egy-két próbatestben tűgöcsök (<5mm) előfordultak. A próbatesteket nem klimatizáltuk. A nedvességtartalom kiszárításos módszerrel történő meghatározása után a próbatesteket azonnal összetörtük. A sűrűség és a nedvességtartalom a következő határok között mozgott: 0,33-0,45 g/cm^3 és 12,31-14,83%. Három különböző rostlefutást vágtunk ki a pallókból: φ= 0° (*L*), 22° és 45°. Az évgyűrűállás (ψ) 0°(*T*)-90°(*R*) tartományon belül változott. Az esztergályozás előtt minden próbatest rostlefutását, évgyűrűállását kamera és CAD-szoftver segítségével megmértük. Minden oldalnyomás-orientáció kombináció során 6 próbatestet törtünk össze, azaz összesen 54 darabot vizsgáltunk.

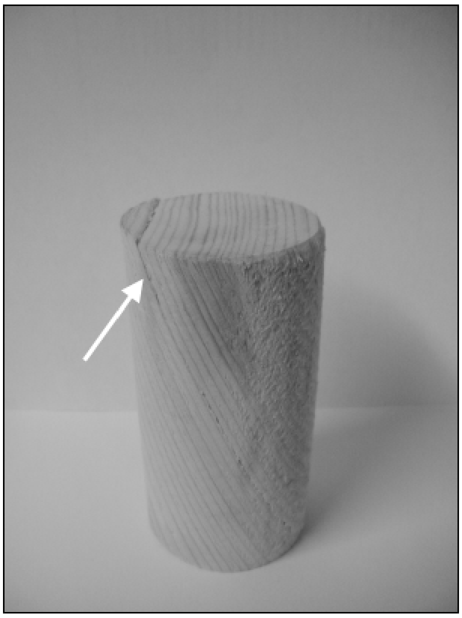
A hengeres próbatesteket egy Walter und Bai gyártmányú triaxiális törőberendezéssel törtük össze (a gép típusa: DLV-250/DZ-10). A berendezés erőmérő cellája 250 kN terhelésig mér, a triaxiális nyomócella 150 bar hidrosztatikus nyomás kifejtésére képes. Szalai (2001) alapján a lucfenyő nyomószilárdsága az *R* irányban 3,49 MPa, *T* irányban 7,05 MPa ezért olyan oldalnyomás értéket választottunk, mely során feltételezzük, hogy pusztán az oldalnyomástól nem megy tönkre a faanyag, még ferde rostlefutás esetén sem. Az alkalmazott oldalnyomások 5,10 és 15 bar között változtak. Az axiális terhelési sebesség pedig 1 mm/min volt.

A tesztberendezés három fő részből állt: az univerzális terhelőberendezésből (ez adja át az axiális terhelést), a triaxiális nyomócellából (ebben van az oldalnyomás), valamint a nyomócellán belüli keretből, amely rögzíti a próbatestet (4.5. ábra).



4.5. ábra: Terhelőberendezés szétszerelt állapotban. a) triaxiális nyomócella, b) teherátadó acélrúd, c) gumi O-gyűrű, f) Teflon lapka, g) hengeres lucfenyő próbatest h) gumi burok. A nyíl az axiális erő irányát mutatja.

Először a próbatestet egy gumi burokba kellett behelyezni, hogy elkerüljük a faanyag olajjal való érintkezését. Majd Teflon lapkákat tettünk a bütü és a lapos fémhengerek közé, hogy csökkentsük a súrlódást a faanyag és a fém között. A gumi O-gyűrűk segítségével rögzítettük a gumi burkot, a próbatestet, a Teflon lapkákat, és a lapos acélhengereket. A lapos acélhengeren egy körbefutó nút volt található, melybe bele lehetett illesztetni a gumi O-gyűrűket. Ezután az eddig összeállított darabot belehelyeztük a keretbe, majd a keretet beleraktuk a triaxiális nyomócellába. Egy kis axiális terhelést alkalmaztunk (0,001-0,002 kN), hogy elkerüljük a próbatest felemelkedését akkor, mikor az olajjal töltjük fel a triaxiális nyomócellát. Ezután feltöltöttük a cellát olajjal. Miután tele lett, légmentesen lezártuk, majd alkalmaztuk az éppen aktuális oldalnyomást (5, 10 vagy 15 bar). A végleges oldalnyomás elérése után terheltük a próbatestet axiálisan. Az oldalnyomás értéke a törővizsgálat során állandó volt. A teszt alatt mértük az axiális erőt, valamint az axiális elmozdulást. A próbatest akkor ment tönkre, amikor hirtelen visszaesett az erő, vagy állandó erőhöz növekvő axiális elmozdulás tartozott. Ezután eltávolítottuk a tengelyirányú terhelést, majd elvettük a nyomást és végül, leeresztettük az olajat. A 4.6. ábra bemutat egy tesztelt próbatestet.



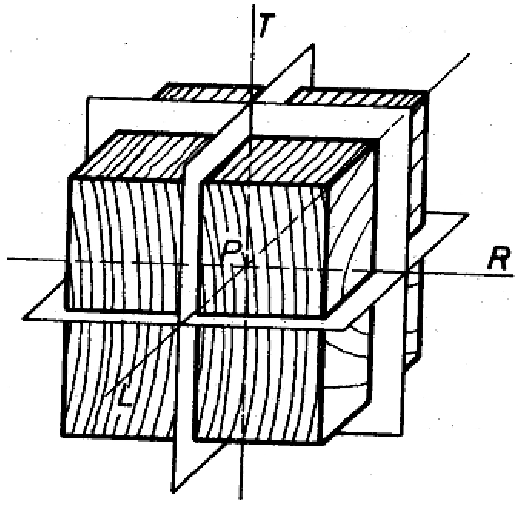
4.6. ábra: Triaxiális nyomóvizsgálatnak kitett, 22°-os rostlefutású lucfenyő próbatest. A nyíl egy rostirányú repedésre hívja fel a figyelmet.

Az 54 darab triaxiálisan vizsgált próbatestből 4 darab eredménye nem értékelhető, mivel már az oldalnyomástól tönkre ment a faanyag, ezért a végeredményként 50 darab triaxiális feszültségállapot keletkezett a tönkremenetel pillanatában a különböző orientációjú próbatesteken.

Miután a biaxiális és a triaxiális kísérleti értékek a rendelkezésünkre álltak, a kutatás következő feladata a kísérleti feszültségállapotok átszámítása volt a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe, hogy be tudjuk helyettesíteni a feszültségértékeket a von Mises, a Tsai-Wu és az Ashkenazi szilárdsági kritériumba.

5. Az összetett feszültségállapotok transzformációja a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe

A farönkben a rostok szerveződésének köszönhetően a faanyagot makroszkopikus szinten ortogonálisan anizotrop (ortotrop) anyagnak lehet tekinteni (5.1. ábra). A faanyag főirányainak tengelyeit *L, R, T* ortonormális egységvektorokkal jellemezhetjük, ahol *L* – a rostirány (longitudinális irány), *R* – a sugárirány (radiális irány), valamint *T* – a húrirány (tangenciális irány). Továbbá megkülönböztetjük a faanyag anatómiai fősíkjait is: *LR* – sugársík, *LT* – érintősík, *RT* – bütüsík.



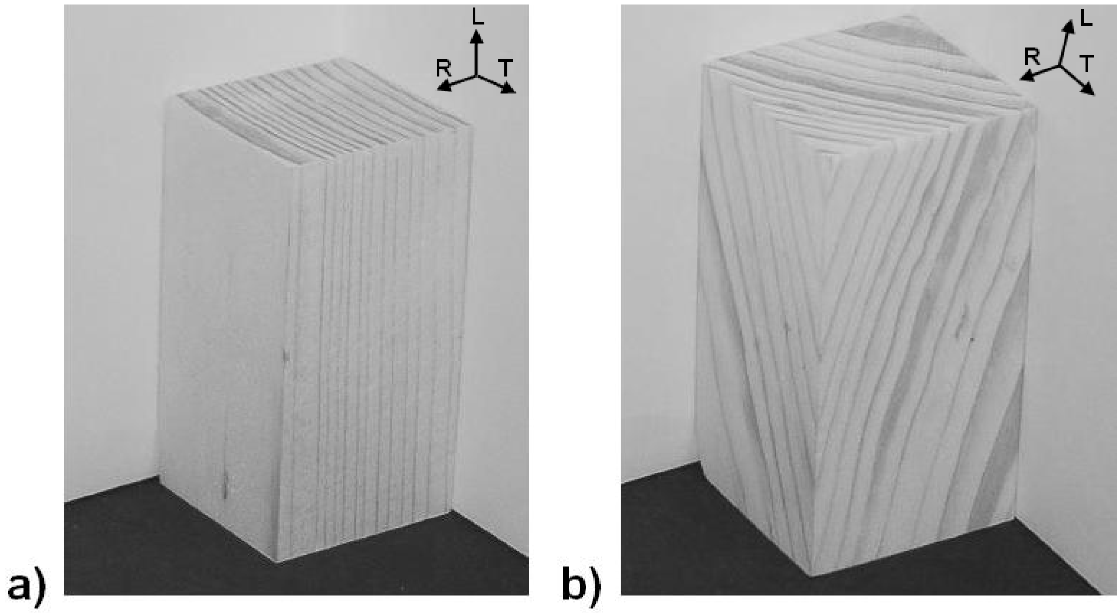
5.1. ábra: A természetes faanyag három egymásra merőleges szimmetriasíkja. L – longitudinális irány, R – radiális irány, T – tangenciális irány, LR – sugársík, LT – érintő sík, RT – bütü sík.

A faanyag fizikai-mechanikai tulajdonságai jelentősen függenek az iránytól. Egy csekély szögeltérés is számottevő hatással lehet a tulajdonságok nagyságára. Ezért fűrészáru vizuális osztályozásánál figyelembe veszik a rostiránytól való szögeltérést, és a nagyságától függően osztályokba (MSZ EN 14081-1) sorolják. A faszerkezetekben található elemek pontjaiban a feszültségi állapotot egy külső, általunk megadott koordinátarendszerben határozzuk meg. Ennek a koordinátarendszernek a tengelyei általában párhuzamosak a teherátadó berendezés szerkezeti főtengelyeivel vagy a vizsgált fa próbatest éleivel.

A mechanikai törővizsgálatokhoz készített próbatestek éleinek az irányai azonban nem mindig párhuzamosak a faanyag anatómiai főirányaival. A mi kísérleteink célja is éppen a mechanikai tulajdonságok irányfüggésének a vizsgálata. Ha ismerjük az anyagtenzorokat az anatómiai főirányok rendszerében, akkor az egy iránnyal jellemezhető tulajdonságokat (pl. rugalmassági modulusz, normálszilárdság) a tenzorok transzformációs szabályai alapján számíthatjuk (Klingbeil 1966, de Boer 1982, Szalai 1994).

Azonban, ha a feszültségi állapot összetett, akkor a faanyag viselkedését már bonyolultabb elméletekkel kell meghatározni. Például anizotrop anyagok feszültségi-alakváltozási állapotainak a kapcsolatára az anizotrop anyagok általános Hooke-törvényét kell alkalmazni. Ha a tönkremeneteli viselkedést tanulmányozzuk, akkor összetett feszültségi állapot esetén a szilárdsági elméleteket kell alkalmazni. Ezek azonban mind úgy működnek, hogy bennük a ható feszültség állapotot az anyagok anatómiai vagy szerkezeti főtengely-rendszerében kell megadni. Tehát, ha a feszültségi állapot praktikus okokból a fa próbatest éleihez kötött koordináta rendszerben ismert, akkor azt át kell számítani a faanyag anatómiai főtengely-rendszerébe. Megjegyezzük, hogy úgy is alkalmazhatnánk a tönkremeneteli elméleteket, hogy maradunk az önkényesen felvett koordinátarendszernél, ekkor azonban a szilárdsági tenzor elemeit kellene átszámítani a faanyag anatómiai főtengely-rendszeréből az önkényesen választottba. A két koordinátarendszer egymáshoz viszonyított helyzetét azonban ilyenkor is ismerni kell, ráadásul nem a feszültségi állapot (kétdimenziós tenzor) hat komponensét, hanem a szilárdsági tenzor (négydimenziós tenzor) kilenc komponensét kellene átszámítani. Az utóbbi megoldás hosszadalmasabb és bonyolultabb.

A tönkremeneteli elméletek ellenőrzését lineáris és síkbeli feszültségi állapotok esetén viszonylag könnyen elvégezhetjük. Egy- és kéttengelyű feszültségi állapotot kísérletileg egyszerű létrehozni. A térbeli feszültségi állapot kísérleti megvalósítása – főleg úgy, hogy a feszültség-komponensek pontosan mérhetők legyenek – meglehetősen körülményes. A térbeli feszültségi állapot létrehozásához inkább azt az utat járjuk, hogy a berendezés által könnyen megvalósítható három, egymásra merőleges normál igénybevételt alkalmazva, a próbatest orientációját tetszőlegesre választjuk (5.2. ábra). Ebben az esetben a feszültségi állapotot átszámítva a faanyag természetes koordinátarendszerébe, formálisan általános, térbeli feszültségi állapotot kapunk, amely alkalmas a szilárdsági elméletek összetett feszültségi állapotnak megfelelő ellenőrzésére.

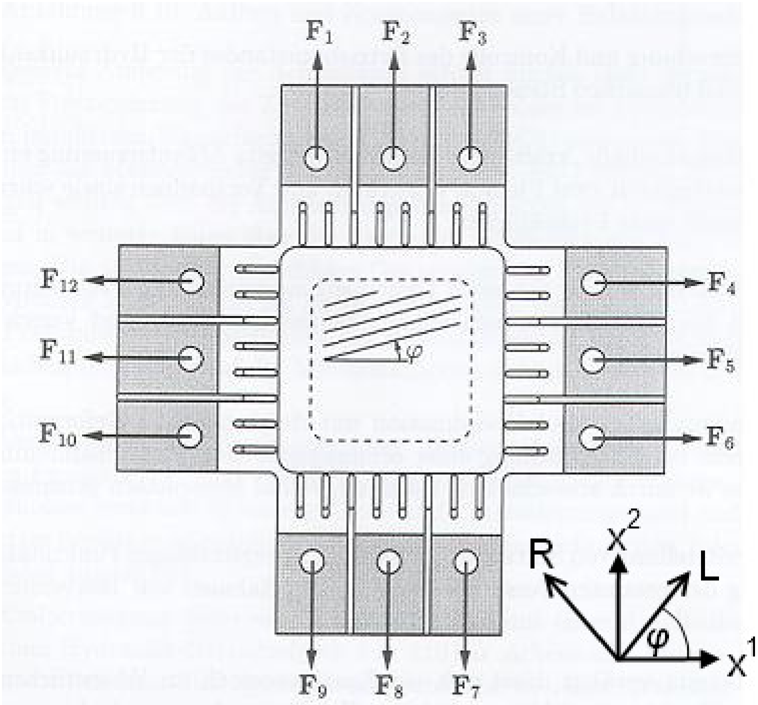


5.2. ábra: Lucfenyő próbatestek: a) az anatómiai főirányok párhuzamosak a hasáb oldalélével, b) általános helyzetűek (Vágó 2005). A b) ábrán az R és a T tengely nem párhuzamos a faanyag anatómiai irányaival.

Az ellenőrzéshez szükség van a próbatest geometriai tengelyrendszerében ismert feszültségi állapotok komponenseinek a faanyag fő anatómiai irányának megfelelő koordinátarendszerbe való átszámítására. A kritikus lépést a próbatest élei és a faanyag anatómiai főirányainak helyzete közötti kapcsolat megadása jelenti.

Általános orientációjú faanyag mechanikai tulajdonságainak a transzformációval már sokan foglalkoztak. Bindzi és Samson (1995) transzformációs mátrixát csak akkor lehet alkalmazni, ha a sugárirány beleesik a próbatest oldallapjába. Goodman és Bodig (1970) eredményét is korlátozottan lehet csak alkalmazni, mivel teljesen általános helyzetű faanyagon uralkodó feszültségi állapotainak a transzformációjára nem alkalmas. Azonban a Hermanson és tsai. (1997) által bemutatott munka alapján teljesen általános helyzetű faanyagon uralkodó feszültségi állapotokat is lehet transzformálni.

Síkbeli feszültségi állapot esetén viszonylag egyszerű a helyzet. A Bécsi Műszaki Egyetem által elvégzett vizsgálatok során, mint azt az 5.3. ábrán is láthatjuk a próbatesteket mind az *LR* síkból vágták ki. Egyedül a rostirány helyzete változott.

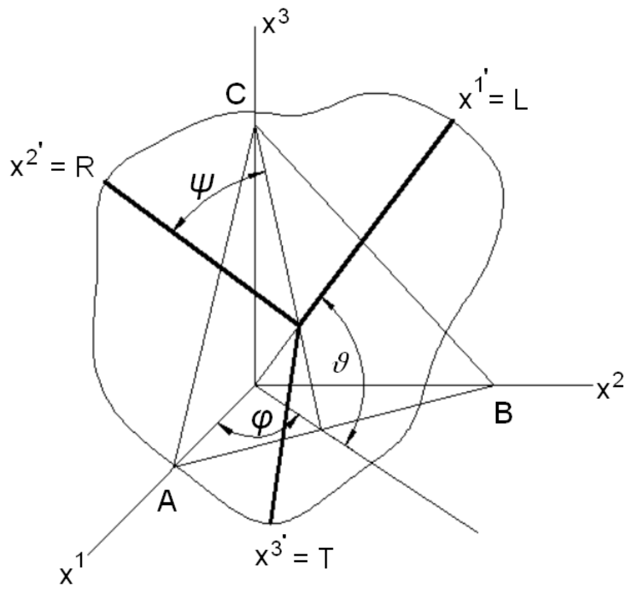


5.3. ábra: A síkbeli törővizsgálathoz kialakított próbatest orientációja: a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszer (x^1, x^2) és a faanyag anatómiai főirányai közötti szög (φ) a rostirány.

A próbatestek között a különbség csak a rostirány lefutásában van, annak helyzetét a φ szög egyértelműen meghatározza, amely egyértelműen és pontosan mérhető. A feszültségi állapotokat tehát csak síkban kell transzformálni az alábbi összefüggések segítségével:

$$\begin{aligned} \sigma^{LL} &= \sigma^{11}\cos^2\varphi + \sigma^{22}\sin^2\varphi \\ \sigma^{RR} &= \sigma^{11}\sin^2\varphi + \sigma^{22}\cos^2\varphi \\ \sigma^{LR} &= (\sigma^{11} - \sigma^{22})\sin\varphi\cos\varphi \\ \sigma^{RL} &= \sigma^{LR} \end{aligned} . \qquad 5.1$$

Teljesen általános orientációjú fa próbatest esetén a feszültségállapotok transzformációját a következőképpen végezzük. Az 5.4. ábrának megfelelően három egymást követő forgatás segítségével eljuthatunk az élekkel párhuzamos koordinátarendszerből (x^1, x^2, x^3) az anatómiai főirányok rendszerébe. Először meghatározzuk a rostirány helyzetét a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszerhez képest. Elforgatjuk az x^3 tengely körül az x^1 és x^2 tengelyeket φ szöggel, majd az elforgatott x^2 tengely körül ϑ nagyságú forgatást végzünk. Ekkor a kétszer elforgatott x^1 tengely iránya megegyezik a rostiránnyal ($x^{1'}$=L), azaz minden φ,ϑ szögértékpár meghatározza a rostlefutás irányát. Mivel a sugárirány (R) és a húrirány (T) merőleges a rostirányra ezért a két főirány helyzete biztosan az L normálisú síkban lesz. Egy harmadik forgatás azért szükséges, hogy az R és a T irány helyzetét is megkapjuk, ezért ψ szöggel forgatjuk $x^{2'}$ helyzetét az ABC háromszög AB oldalhoz tartozó magasságvonalától az óramutató járásával ellentétesen. Így megkapjuk a sugár- és a húrirány pontos helyzetét is ($x^{2'} = R$, $x^{3'} = T$).



5.4. ábra: Az L normálisú síkban (RT-sík) fekvő R irány helyzete és megadása (φ, ϑ, ψ) szögek segítségével az x^1, x^2, x^3 tengelyű koordinátarendszerben.

Ha ismerjük φ, ϑ és ψ szögeket, akkor transzformálni tudjuk a feszültségi állapotot a próbatest éleinek a koordinátarendszeréből a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe.

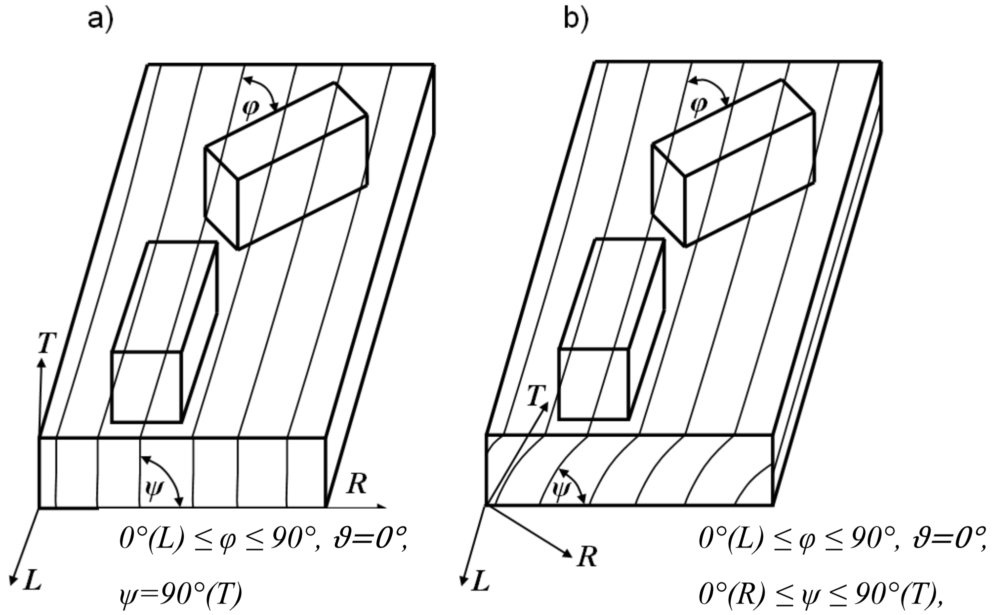
Szalai (1994) alapján a három egymás után végrehajtott forgatás eredőjét össze lehet foglalni egy transzformációs mátrixba:

$$\beta_{i'}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi & -\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi & -\cos\vartheta\sin\psi \end{bmatrix} \quad 5.2$$

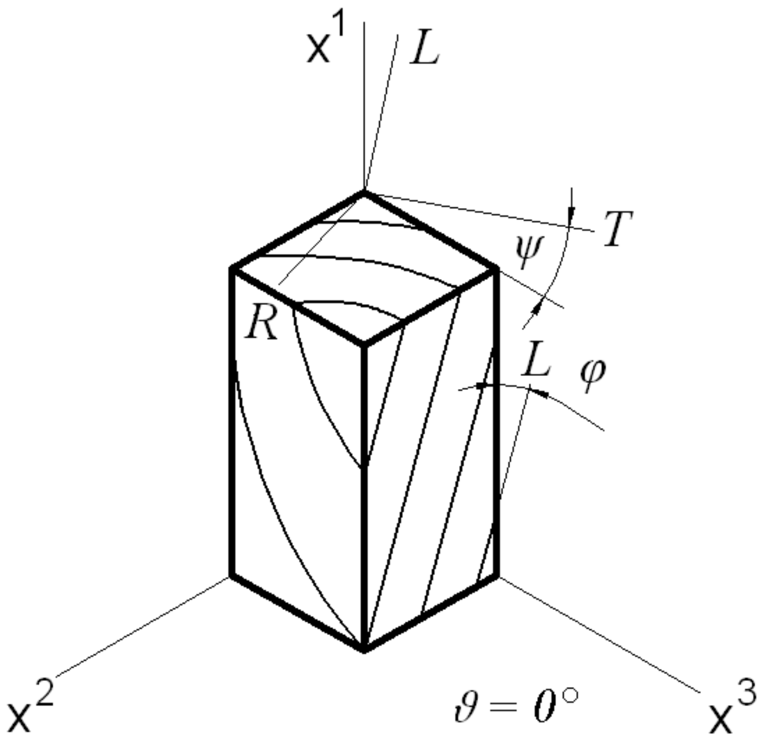
Az egyetlen problémát az okozza, hogy egy teljesen általános orientációjú fa próbatesten (hasábban) az anatómiai főirányok helyzetének s ezzel a három szögérték pontos meghatározása nagyon körülményes. Egyszerű szögmérő nem elegendő, egy különleges szerkezetet kellene konstruálni az irányok és a szögek pontos és kényelmes meghatározásához.

Valami olyan módszerre lenne szükség ahol a fa próbatest felszínén látható vonalrendszer irányainak mérésével (amihez valóban csak egy szögmérő kell) lehetne meghatározni az anatómiai főirányok helyzetét. Ezzel próbálkoztak Hermanson és tsai. (1997) is.

Szerencsére a rendelkezésünkre álló faanyag nem tette lehetővé a teljesen általános orientációjú próbatestek kivágását, s ezzel nem kellett alkalmaznunk a teljesen általános érvényű elméletet. A lucfenyő anyagból csak olyan deszkák, illetve pallók álltak rendelkezésre, amelyeknél az L irány egybeesett a fűrészáru hossztengelyével (4. fejezet). Ez esetben azonban a feszültségállapotok transzformációjához szükséges transzformációs szögek a próbatestek oldallapjain mérhető felületi szögek segítségével egyértelműen megadhatók. Ilyen orientáció mellett a φ forgatási szög megegyezik a rostirány és a palló hossztengelye által bezárt szöggel, a ϑ szög mindig 0, a ψ transzformációs szög pedig az évgyűrűállás szögével egyezik meg (5.5. és 5.6. ábra), amit a próbatest végkeresztmetszetén mérhetünk. A felületi szögeket CAD szoftverrel mértük meg a próbatestekről készített fényképeken. A pontosabb feszültségállapot-transzformáció miatt, a rostirányt és az évgyűrűállást nemcsak egy oldalon mértük meg, hanem a szemközti oldalon is leolvastuk, és a két szög számtani átlagával számoltunk.



5.5. ábra: φ, ϑ és ψ forgatási szögek a triaxiális próbatesten a palló orientációjához képest. φ – rostirány, ϑ – 0°, ψ – évgyűrűállás. a) LR síkú próbatest, b) általános orientációjú próbatest, de a rostirány közvetlenül mérhető a próbatest oldallapján.



5.6. ábra: Az 5.4. ábrának megfelelő φ, ϑ és ψ forgatási szögek értelmezése a rendelkezésünkre álló faanyag esetén.

Mivel a rostirány benne van a palló síkjában, azt közvetlenül le tudjuk mérni a felületen, és mivel párhuzamos a palló síkjával, ezért a ϑ forgatási szög mindig nulla. Ennek megfelelően a transzformációs mátrix (5.2) a következőképpen egyszerűsödik:

$$\beta_{i'}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\vartheta & 0 \\ \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi & \cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\cos\psi & -\sin\psi \end{bmatrix}, \qquad 5.3$$

illetve a feszültségek átszámításához szükséges 5.3 transzponáltjának meghatározása:

$$\beta_{i}^{i'} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cos\psi \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \end{bmatrix}. \qquad 5.4$$

Miután ismert a transzformációs mátrix, a feszültségállapotokat transzformálni tudjuk. A tönkremenetel pillanatában, a próbatesten kialakult feszültségi állapot a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszerében (megegyezik a terhelési irányokkal) a következő alakot veszi fel:

$$\bar{\bar{\sigma}}\left(x^1,x^2,x^3\right)=\begin{bmatrix}\sigma^{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma^{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma^{33}\end{bmatrix}. \qquad 5.5$$

$\sigma^{11}\neq 0$, $\sigma^{23}\neq 0$, és $\sigma^{33}\neq 0$ miatt térbeli feszültségi állapottal van dolgunk. Általános orientáció esetén a faanyag anatómiai főirányainak a rendszerében a feszültségállapot a következő szerkezetet ölti:

$$\bar{\bar{\sigma}}\left(L,R,T\right)=\begin{bmatrix}\sigma^{LL} & \sigma^{RL} & \sigma^{TL}\\ \sigma^{LR} & \sigma^{RR} & \sigma^{TR}\\ \sigma^{LT} & \sigma^{RT} & \sigma^{TT}\end{bmatrix}. \qquad 5.6$$

Látható, hogy nyírófeszültségek is megjelenhetnek a normálfeszültségek mellett. A transzformációs mátrix komponensei és a tenzorelmélet alkalmazásával a feszültségállapotokat a próbatest éleinek a koordinátarendszeréből transzformálni lehet a faanyag anatómiai főirányainak a rendszerébe az alábbiak szerint:

$$\sigma^{i'j'}=\sigma^{ij}\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\ , \qquad i,j,k=1,2,3 \text{ és } i',j',k'=L,R,T \qquad 5.7$$

ahol,

$\beta_i^{i'}$ és $\beta_{j'}^{j'}$ – transzformációs mátrix (5.4) elemei,

$\sigma^{i'j'}$ – feszültségi állapot a faanyag anatómiai főirányainak koordinátarendszerében (L, R, T),

σ^{ij} – feszültségi állapot a próbatest éleinek koordinátarendszerében (x^1, x^2, x^3).

Kifejtve, a faanyag anatómiai főirányaiban a feszültségi állapot komponenseinek a meghatározása a következő (itt figyelembe vettük 5.4-et és 5.5-öt):

$$\begin{aligned}
\sigma^{LL}&=\sigma^{11}\beta_1^L\beta_1^L+\sigma^{22}\beta_2^L\beta_2^L+\sigma^{33}\beta_3^L\beta_3^L\\
\sigma^{LR}&=\sigma^{11}\beta_1^L\beta_1^R+\sigma^{22}\beta_2^L\beta_2^R+\sigma^{33}\beta_3^L\beta_3^R\\
\sigma^{LT}&=\sigma^{11}\beta_1^L\beta_1^T+\sigma^{22}\beta_2^L\beta_2^T+\sigma^{33}\beta_3^L\beta_3^T\\
\sigma^{RL}&=\sigma^{11}\beta_1^R\beta_1^L+\sigma^{22}\beta_2^R\beta_2^L+\sigma^{33}\beta_3^R\beta_3^L\\
\sigma^{RR}&=\sigma^{11}\beta_1^R\beta_1^R+\sigma^{22}\beta_2^R\beta_2^R+\sigma^{33}\beta_3^R\beta_3^R\ .\\
\sigma^{RT}&=\sigma^{11}\beta_1^R\beta_1^T+\sigma^{22}\beta_2^R\beta_2^T+\sigma^{33}\beta_3^R\beta_3^T\\
\sigma^{TL}&=\sigma^{11}\beta_1^T\beta_1^L+\sigma^{22}\beta_2^T\beta_2^L+\sigma^{33}\beta_3^T\beta_3^L\\
\sigma^{TR}&=\sigma^{11}\beta_1^T\beta_1^R+\sigma^{22}\beta_2^T\beta_2^R+\sigma^{33}\beta_3^T\beta_3^R\\
\sigma^{TT}&=\sigma^{11}\beta_1^T\beta_1^T+\sigma^{22}\beta_2^T\beta_2^T+\sigma^{33}\beta_3^T\beta_3^T
\end{aligned} \qquad 5.8$$

Mivel $\beta_3^L = 0$, ezért 5.8 tovább egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}
\sigma^{LL} &= \sigma^{11}\beta_1^L\beta_1^L + \sigma^{22}\beta_2^L\beta_2^L \\
\sigma^{LR} &= \sigma^{11}\beta_1^L\beta_1^R + \sigma^{22}\beta_2^L\beta_2^R \\
\sigma^{LT} &= \sigma^{11}\beta_1^L\beta_1^T + \sigma^{22}\beta_2^L\beta_2^T \\
\sigma^{RL} &= \sigma^{11}\beta_1^R\beta_1^L + \sigma^{22}\beta_2^R\beta_2^L \\
\sigma^{RR} &= \sigma^{11}\beta_1^R\beta_1^R + \sigma^{22}\beta_2^R\beta_2^R + \sigma^{33}\beta_3^R\beta_3^R \\
\sigma^{RT} &= \sigma^{11}\beta_1^R\beta_1^T + \sigma^{22}\beta_2^R\beta_2^T + \sigma^{33}\beta_3^R\beta_3^T \\
\sigma^{TL} &= \sigma^{11}\beta_1^T\beta_1^L + \sigma^{22}\beta_2^T\beta_2^L \\
\sigma^{TR} &= \sigma^{11}\beta_1^T\beta_1^R + \sigma^{22}\beta_2^T\beta_2^R + \sigma^{33}\beta_3^T\beta_3^R \\
\sigma^{TT} &= \sigma^{11}\beta_1^T\beta_1^T + \sigma^{22}\beta_2^T\beta_2^T + \sigma^{33}\beta_3^T\beta_3^T
\end{aligned} \tag{5.9}$$

A próbatestek felületén mérhető szögek és a bemutatott feszültségátszámítási módszerek segítségével transzformáltuk a síkbeli törővizsgálatból származó 423 db és a térbeli törővizsgálatból származó 50 db összetett feszültségi állapotot a próbatestek éleivel párhuzamos koordináta rendszerből a faanyag anatómiai főirányainak koordinátarendszerébe. A transzformált feszültségállapotok segítségével a tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának vizsgálatához a szükséges kísérleti adatok így már számunkra alkalmas formában a rendelkezésünkre álltak.

6. A tönkremeneteli elméletek ellenőrzése

Az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelő relációk jobb oldala eleve egységnyi (von Mises, Tsai-Wu elmélet) vagy úgy alakíthatók, hogy a jobb oldalon szintén egységnyi mennyiség legyen (Ashkenazi elmélet). A relációk, összhangban a tönkremeneteli elméleteknek megfelelő grafikus felületekkel, mint láttuk, a következőket jelentik. Ha a relációk bal oldalába helyettesített tényleges feszültségi állapotok éppen 1-et adnak, akkor feszültségi állapotnak megfelelő képpont rajta van a szilárdsági felületen, tehát a tönkremenetel határán vagyunk. Ha a baloldal kisebb, mint 1, az elmélet szerint még nem következhet be tönkremenetel, ha nagyobb, mint egy, akkor már korábban be kellett volna következnie a tönkremenetelnek. Ezért, ha az egyes tönkremeneteli relációk bal oldali értékét n-nel jelöljük, melyet tönkremeneteli viszonyszámnak nevezünk, akkor ennek nagyságából azonnal következtethetünk az anyag állapotára. Ha n=1, az anyag éppen a tönkremenetel határhelyzetében van, ha n<1, akkor az anyag az elmélet szerint még nem ment tönkre, ha n>1, akkor az elmélet a tönkremenetel bekövetkezésére utal. Az n tönkremeneteli viszonyszámmal tehát azonnal képet kaphatunk az elmélet tönkremenetelre vonatkozó jóslatának helyességéről.

A faanyag természetes szórása, és a kísérleti körülmények által megszabott véletlenszerű szórás kötelezővé teszi, hogy az elméletek ellenőrzésére minél nagyobb számú vizsgálatot végezzünk. A szórás ugyanis azzal a következménnyel jár, hogy kevés számú vizsgálatot megfigyelve az n értéke csak kis biztonsággal utal a tönkremenetel bekövetkezésére. Ez a bizonytalanság azonban nagyszámú próbatest tönkremenetelének vizsgálatával egyre inkább csökken. Ezért az egyes kísérletek alapján kapott tönkremeneteli viszonyszámokat matematikai statisztikai és valószínűségelméleti módszerekkel kell kiértékelni. Az n-ekre kapott átlag, szórás, és egyéb statisztikai jellemzők már lehetővé teszik, hogy a tönkremeneteli elméletek helyességét megítéljük.

A tönkremeneteli viszonyszámot az alábbi összefüggésekkel számíthatjuk ki az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelően:

Von Mises elmélet:

$$n_{von\ Mises} = a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}, \qquad i, j, k, l = L, R, T \qquad 6.1$$

Tsai-Wu elmélet:

$$n_{Tsai\text{-}Wu} = a_{ij}\sigma^{ij} + a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}, \qquad i, j, k, l = L, R, T \qquad 6.2$$

Ashkenazi elmélet:

$$n_{Ashkenazi} = \frac{a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}}{\left|\sqrt{I_1^2 - I_2}\right|}, \qquad i, j, k, l = L, R, T \qquad 6.3$$

ahol,

$n_{von\ Mises}$, $n_{Tsai\text{-}Wu}$, $n_{Ashkenazi}$ – az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelő tönkremeneteli viszonyszám,

a_{ij}, a_{ijkl} – a tönkremeneteli elméleteknek megfelelő szilárdsági tenzor,

σ^{ij} – a ható feszültségi állapot, ill. annak tenzora,

I_1 és I_2 – az első és második feszültségi invariáns.

7. Eredmények és diszkusszió

A tönkremeneteli elméletek ellenőrzéséhez csoportosítani kellett az összetett feszültségi állapotokat a normálfeszültségek előjele alapján. Erre azért volt szükség, mert az egyes csoportoknak megfelelően másképpen kell kiszámítani a tenzorkomponenseket a tönkremeneteli elméletekhez. Mivel a síkbeli feszültségállapotokban a normálfeszültségek előjele alapján 4 csoportot lehetett létrehozni, a síkbeli feszültségállapotokat a következő csoportokra bontottuk: 145 feszültségállapot került a $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$, 103 feszültségállapot a $\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$, 113 feszültségállapot a $\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$, valamint 62 feszültségállapot a $\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$ feszültségcsoportba. A térbeli feszültségállapotok csoportosítására a normálfeszültségek előjele alapján nem volt szükség, hiszen mindhárom normálfeszültség nyomófeszültség (σ^{LL}<0, σ^{RR}<0, σ^{TT}<0), azaz egy csoportot alkotnak.

Az eredményeket ezért hat csoporton fogjuk bemutatni: a síkbeli feszültségállapotok négy alcsoportja ($\sigma^{LL+}\sigma^{RR+};\sigma^{LL+}\sigma^{RR-};\sigma^{LL-}\sigma^{RR-};\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$) az összes síkbeli feszültségállapot egyben ($\Sigma Biax$), valamint az összes térbeli feszültségállapot ($\Sigma Triax$).

7.1. A szilárdsági kritériumok tenzorkomponensei

A 2.3. fejezet szerint meghatároztuk a von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi szilárdsági kritériumoknak megfelelő tenzorkomponenseket mind síkbeli mind térbeli feszültségi állapotok esetén. A síkbeli feszültségállapotok esetén meghatározott tenzorkomponenseket bemutatja a 7.1. táblázat, a térbeli feszültségállapotokhoz meghatározott tenzorkomponenseket pedig a 7.2. táblázat. Meg kell jegyezni, hogy térbeli esetben minden egyes feszültségállapothoz kiszámoltuk a tenzorkomponenseket, mivel az alkalmazott próbatestek nedvességtartalmi és sűrűségi értékei nem egyeztek meg az irodalmi adattal. A megváltozott nedvességtartalomnak és sűrűségnek megfelelő technikai szilárdságokat a 2.27 és 2.28 képleteknek megfelelően számítottuk. Ezért a számított tenzorkomponensek is rendelkeztek statisztikai jellemzőkkel (a variációs koefficienst tűntettük fel a táblázatban).

7.1. táblázat: A von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi elmélet alapján számolt tenzorkomponensek az egyes feszültségcsoportoknak megfelelően az LR síkban uralkodó feszültségi állapot esetén.

	Fesz. csop. *	a_{LL} [MPa^{-1}]	a_{RR} [MPa^{-1}]	a_{LLLL} [MPa^{-1}]	a_{RRRR} [MPa^{-1}]	$a_{LLRR}+a_{RRLL}$ [MPa^{-1}]	$a_{LRLR}+a_{LRRL}+$ $+a_{RLLR}+a_{RLRL}$ [MPa^{-1}]
von Mises	I.	-	-	0,00025	0,02853	0,00748	0,01151
	II.	-	-	0,00025	0,08210	0,01985	0,01151
	III.	-	-	0,00041	0,08210	-0,04551	0,01151
	IV.	-	-	0,00041	0,02853	-0,01894	0,01151
Tsai- Wu	I.	-	-0,11761	0,00032	0,04840	0,01424	0,01151
	II.	-	-0,11761	0,00032	0,04840	0,01449	0,01151
	III.	-	-0,11761	0,00032	0,04840	-0,03862	0,01151
	IV.	-	-0,11761	0,00032	0,04840	-0,02391	0,01151
Ashkenazi	I.	-	-	0,01574	0,16892	0,14520	0,10730
	II.	-	-	0,01574	0,28653	0,05228	0,10730
	III.	-	-	0,02027	0,28653	0,02643	0,10730
	IV.	-	-	0,02027	0,16892	-0,02963	0,10730

* A feszültségek csoportosítása: I – $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$; II – $\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$; III – $\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$;
IV – $\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$

7.2. táblázat: A von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi elmélet alapján számolt tenzorkomponensek térbeli feszültségállapot esetén.

Tenzorkomponensek:	von Mises	Tsai-Wu	Ashkenazi
a_{LL}	-	-0,00595**	-
a_{RR}	-	-0,15471**	-
a_{TT}	-	0,19250**	-
a_{LLLL}	0,00072*	0,00056*	0,02666**
a_{RRRR}	0,14312*	0,08438*	0,37691**
a_{TTTT}	0,14478*	0,07126*	0,18658**
$a_{RRLL}+a_{LLRR}$	-0,07933*	-0,06732*	0,03470**
$a_{LLTT}+a_{TTLL}$	0,02054*	0,01234*	0,03957**
$a_{RRTT}+a_{TTRR}$	-0,18810*	-0,17419*	0,21901**
$a_{LRLR}+a_{LRRL}+a_{RLLR}+a_{LRLR}$	0,02007*	0,02007*	0,14114**
$a_{LTLT}+a_{LTTL}+a_{TLLT}+a_{LTLT}$	0,02413*	0,02413*	0,15476**
$a_{RTRT}+a_{RTTR}+a_{TRRT}+a_{TRTR}$	0,42722*	0,42722*	0,65112**

* Az átlagértékhez tartozó variációs koefficiens (17,3%)

**Az átlagértékhez tartozó variációs koefficiens (8,7%)

7.2. A transzformált összetett feszültségállapotok

A síkbeli és a térbeli feszültségi állapotok transzformációit az 5. fejezetnek megfelelően végeztük el. 423 db síkbeli és 50 db térbeli feszültségállapotot transzformáltunk a próbatest éleivel párhuzamos rendszeréből a faanyag anatómiai főirányainak a rendszerébe. Az összes – transzformáció előtti és utáni – feszültségállapot sorszámozva megtalálható a Függelékben. Példaként bemutatjuk egy síkbeli és egy térbeli feszültségállapot transzformációját a faanyag anatómiai főirányainak a rendszerébe.

Vegyük a síkbeli feszültségállapotok közül a 65. sorszámú próbatesten végrehajtott törővizsgálat eredményeit! Az 5.3. ábrának megfelelően a próbatesten a rostlefutás iránya (φ) 15°-os volt, valamint az ábrának megfelelő terhelési irányok mellett a tönkremenetel pillanatában uralkodó feszültségi állapot a következő volt a próbatest éleivel párhuzamos koordináta rendszerben:

$$\overline{\overline{\sigma}}\left(x^1,x^2,x^3\right)=\begin{bmatrix}\sigma^{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma^{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13{,}0669 & 0 & 0\\ 0 & 2{,}5364 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}[\text{MPa}]. \qquad 7.1$$

Felhasználva az 5.1. összefüggést az általános síkbeli feszültségállapotot át tudtuk transzformálni a faanyag anatómiai főirányainak a rendszerébe:

$$\overline{\overline{\sigma}}(L,R,T)=\begin{bmatrix}\sigma^{LL} & \sigma^{RL} & 0\\ \sigma^{LR} & \sigma^{RR} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12{,}3615 & 2{,}6326 & 0\\ 2{,}6326 & 3{,}2418 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}[\mathrm{MPa}]. \qquad 7.2$$

Alkalmaztuk a transzformációs eljárást a térbeli feszültségállapotokra is. Transzformáljuk a térbeli feszültségállapotok közül a 28. sorszámú próbatest eredményeit az 5.6. ábrának megfelelően! A próbatest sűrűsége 0,36 g/cm^3, a nedvességtartalma 14,3%. A rostlefutás iránya (φ) 23,8° az évgyűrűállás (ψ) pedig 3,9°. A tönkremenetel pillanatában, a próbatesten uralkodó feszültségi állapot a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszerben a következő:

$$\overline{\overline{\sigma}}(x^1,x^2,x^3)=\begin{bmatrix}\sigma^{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma^{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma^{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18{,}52 & 0 & 0\\ 0 & -1{,}0 & 0\\ 0 & 0 & -1{,}0\end{bmatrix}[\mathrm{MPa}]. \qquad 7.3$$

Behelyettesítve 5.4. és 5.9-be, a feszültségi állapotot transzformáltuk a faanyag anatómiai főirányainak a rendszerébe:

$$\overline{\overline{\sigma}}(L,R,T)=\begin{bmatrix}\sigma^{LL} & \sigma^{RL} & \sigma^{TL}\\ \sigma^{LR} & \sigma^{RR} & \sigma^{TR}\\ \sigma^{LT} & \sigma^{RT} & \sigma^{TT}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15{,}6758 & -0{,}4392 & -6{,}4425\\ -0{,}4392 & -1{,}0131 & -0{,}1928\\ -6{,}4425 & -0{,}1928 & -3{,}8282\end{bmatrix}[\mathrm{MPa}] \qquad 7.4$$

A fentiekhez hasonló számítást végeztünk minden próbatesten.

7.3. A tönkremeneteli elméletek ellenőrzése

A tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának vizsgálata során a legfontosabb állomása a tönkremeneteli viszonyszámok meghatározása volt. Miután a rendelkezésünkre álltak a von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi elméletnek megfelelő tenzorkomponensek, illetve a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe átszámított feszültségállapotok, lehetővé vált a tönkremeneteli viszonyszámok számítása. A 6. fejezet alapján minden egyes kísérleti feszültségállapotra meghatároztuk a tönkremeneteli viszonyszámokat (6.1-6.3) amelyek statisztikai jellemzőit a 7.3-7.5. táblázatok mutatják be.

7.3. táblázat: A von Mises elmélettel számolt tönkremeneteli viszonyszámok (n) leíró statisztikai kiértékelése a síkbeli feszültségállapotok négy csoportjára, valamint az összes síkbeli feszültségállapotra együttesen, illetve a triaxiális feszültségállapotokra.

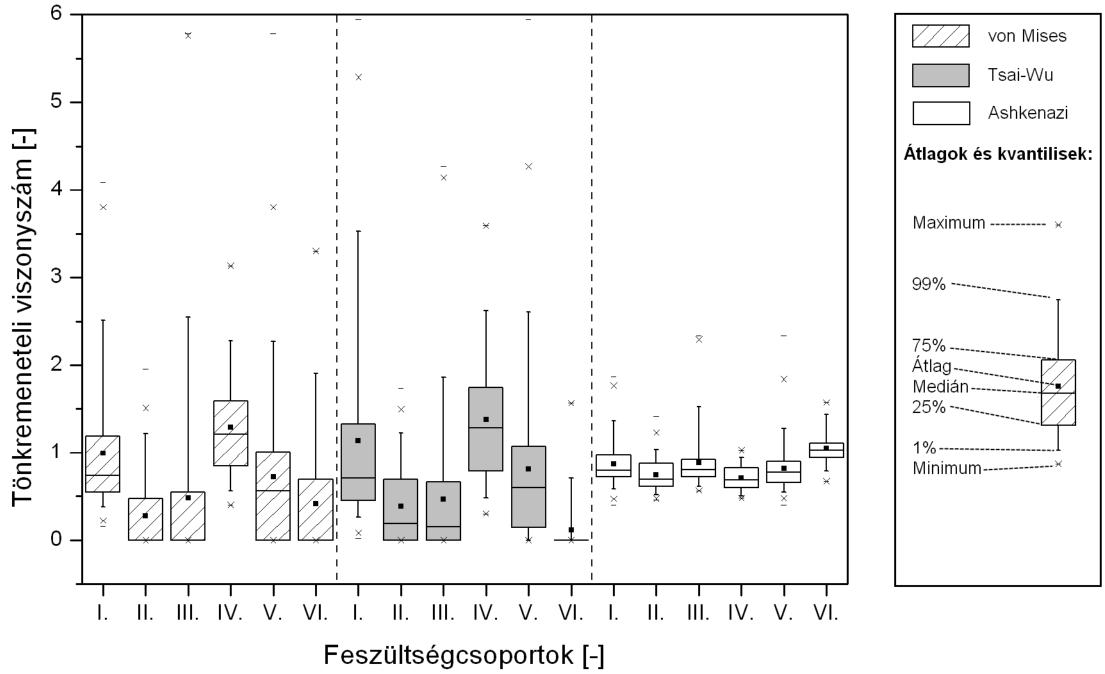
	$\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$	$\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$	Σ Biax	Σ Triax
Elemszám [db]:	145	103	113	62	423	50
Minimum [-]:	0,16	0,00	0,00	0,40	0,00	0,00
Maximum [-]:	4,09	1,96	5,78	3,13	5,78	3,30
Median [-]:	0,74	0,00	0,00	1,22	0,56	0,00
Módusz [-]:	0,75	0,00	0,00	1,25	0,00	0,00
Várható érték [-]:	0,99	0,27	0,48	1,29	0,73	0,42
Szórás négyzet [-]:	0,51	0,18	1,08	0,34	0,69	0,50
Szórás [-]:	0,72	0,43	1,04	0,58	0,83	0,71
CoV [%]:	72,1	155,1	215,5	44,8	114,5	170,2
Ferdeség [-]:	2,06	1,68	3,60	0,92	2,31	2,13
Csúcsosság [-]:	4,67	2,36	14,18	1,04	8,54	5,02

7.4. táblázat: A Tsai-Wu elmélettel számolt tönkremeneteli viszonyszámok (n) leíró statisztikai kiértékelése a síkbeli feszültségállapotok négy csoportjára, valamint az összes síkbeli feszültségállapotra együttesen, illetve a triaxiális feszültségállapotokra.

	$\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$	$\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$	Σ Biax	Σ Triax
Elemszám [db]:	145	103	113	62	423	50
Minimum [-]:	0,02	0,00	0,00	0,30	0,00	0,00
Maximum [-]:	5,94	1,73	4,27	3,59	5,94	1,57
Median [-]:	0,70	0,19	0,15	1,30	0,60	0,00
Módusz [-]:	0,40	0,00	0,00	1,25	0,00	0,00
Várható érték [-]:	1,14	0,38	0,47	1,38	0,81	0,11
Szórás négyzet [-]:	1,23	0,20	0,60	0,50	0,86	0,09
Szórás [-]:	1,11	0,44	0,77	0,71	0,93	0,30
CoV [%]:	97,6	115,3	165,5	51,5	114,4	259,3
Ferdeség [-]:	2,14	0,85	2,92	0,97	2,18	3,45
Csúcsosság [-]:	4,75	-0,19	10,28	1,03	6,24	12,94

7.5. táblázat: Az Ashkenazi elmélettel számolt tönkremeneteli viszonyszámok (n) leíró statisztikai kiértékelése a síkbeli feszültségállapotok négy csoportjára, valamint az összes síkbeli feszültségállapotra együttesen, illetve a triaxiális feszültségállapotokra.

	$\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$	$\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$	$\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$	Σ Biax	Σ Triax
Elemszám [db]:	145	103	113	62	423	50
Minimum [-]:	0,40	0,46	0,56	0,48	0,40	0,67
Maximum [-]:	1,87	1,42	2,33	1,03	2,33	1,57
Median [-]:	0,80	0,70	0,80	0,70	0,77	1,04
Módusz [-]:	0,72	0,65	0,70	0,66	0,76	1,03
Várható érték [-]:	0,87	0,75	0,88	0,71	0,82	1,05
Szórás négyzet [-]:	0,06	0,03	0,09	0,02	0,06	0,03
Szórás [-]:	0,25	0,18	0,31	0,14	0,25	0,17
CoV [%]:	28,2	24,4	35,0	20,1	30,3	16,1
Ferdeség [-]:	1,48	0,85	2,86	0,29	2,32	0,85
Csúcsosság [-]:	2,86	0,77	9,68	-0,79	8,96	1,82



7.6. ábra: A tönkremeneteli viszonyszámok ábrázolása dobozdiagromokkal a von Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi elméleteknek és az egyes feszültségcsoportoknak megfelelően. A feszültségcsoportok: I – $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$; II – $\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$; III – $\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$; IV – $\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$; V – Σ Biax; VI – Σ Triax.

Az egyes feszültségcsoportoknak megfelelően, a három tönkremeneteli elmélettel kiszámolt tönkremeneteli viszonyszámok leíró statisztikai jellemzőit grafikusan reprezentáló ún. dobozdiagramok (*box plots*) láthatók a 7.6. ábrán. A dobozdiagramok jelölik az adott feszültségcsoportban az adott tönkremeneteli elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok átlagát, a mediánt, az 1, 25, 75, és 99%-os kvantilishez tartozó értéket, valamint a tönkremeneteli viszonyszámok minimumát és maximumát. A dobozdiagramok segítségével könnyen láthatók az egyes elméletekkel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok különbségei.

Fontos megemlíteni, hogy negatív értékeket is tapasztaltunk a von Mises és a Tsai-Wu elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok között. A 423 db síkbeli feszültségállapot esetén a von Mises elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok közül 117, a Tsai-Wu elmélet szerinti viszonyszámok közül pedig 98 esetben tapasztaltunk negatív értéket. Illetve, az 50 db térbeli feszültségállapot esetén a von Mises elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok között 31 esetben tapasztaltunk negatív értéket. A Tsai-Wu elmélet esetében ez a szám 38. Ez azt jelenti, hogy síkbeli feszültségállapot esetén a normálfeszültségeknek megfelelő képpont kívül esik a szilárdsági felület alapsíkra eső vetületén, azaz a feszültségi képpont a teljes szilárdsági felületen kívül helyezkedik el. Az elméleti magyarázat térbeli feszültségállapot esetén is hasonló, azonban a magasabb dimenziószám miatt grafikus bemutatására nincs lehetőség. A negatív tönkremeneteli viszonyszámok tehát azt jelentik, hogy az adott elmélet nem írja le helyesen a tönkremenetelt, ezért az ennek a mérésnek megfelelő viszonyszámot nulla értékkel vettük fel. A nulla viszonyszám ugyanis az illeszkedés teljes hiányát jelenti. Az Ashkenazi elmélettel a tönkremeneteli viszonyszámra egyszer sem kaptunk negatív értéket.

Az eredményeket értékelve elmondható, hogy a von Mises és a Tsai-Wu szilárdsági kritériumok által meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok értékei közel esnek síkbeli feszültségállapot esetén 1-hez a $\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$ feszültségcsoportban. A von Mises elméletnél 0,99 a Tsai-Wu elméletnél pedig 1,14 a tönkremeneteli viszonyszám értéke. A variációs koefficiensek nagy értéke miatt a tönkremeneteli viszonyszámok értékeit azonban csak fenntartásokkal fogadhatjuk el. A variációs koefficiens a von Mises elméletnél 72,1% míg a Tsai-Wu elméletnél 97,6%. Hasonló megállapításokra juthatunk, ha megfigyeljük a von Mises és a Tsai-Wu elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok eredményeit a $\sigma^{LL-}\ \sigma^{RR+}$ feszültségcsoportban. A von Mises elméletnél

1,29 a Tsai-Wu elméletnél pedig 1,38 a tönkremeneteli viszonyszám értéke. A variációs koefficiens pedig 44,8% a von Mises elméletnél, illetve 51,5% a Tsai-Wu elmélet esetén. A másik két feszültségcsoportban (σ^{LL-} σ^{RR+} és σ^{LL-} σ^{RR+}) sem a tönkremeneteli viszonyszámok átlaga nem esik 1-hez közel, illetve az eredmények szórása is nagy.

Ezzel szemben, az Ashkenazi elmélet szerint meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok valamennyi feszültségcsoportban egyhez közeli értékek és a variációs koefficiens értékek is a faanyag szilárdsági tulajdonságainak varianciáját tükrözi. *n*(I)=0,87; *n*(II)=0,75; *n*(III)=0,88; *n*(IV)=0,71. *CoV*(I)=28,2% ; *CoV*(II)=24,4%; *CoV*(III)=35,0% és *CoV*(IV)=20,1%.

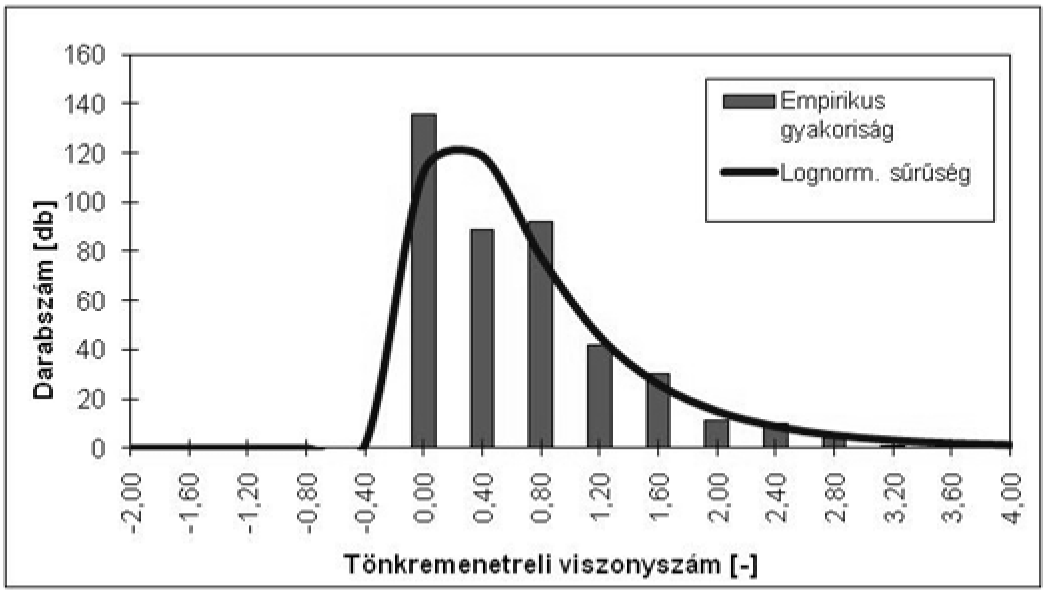
Ha megfigyeljük az összesített eredményeket a biaxiális feszültségállapotok esetén, akkor a következő megállapítást tehetjük. A von Mises elmélettel számolt átlag 0,73, melyhez 114,5%-os változékonyság tartozik. A Tsai-Wu elmélettel számolt tönkremeneteli viszonyszámok átlaga 0,81. A variációs koefficiens ennél a tönkremeneteli elméletnél 114,4%. Bár az Ashkenazi elmélettel számolt tönkremeneteli viszonyszámok átlaga 0,82, kicsit kisebb, mint 1, azonban a variációs koefficiens (30,3%) közelebb áll a faanyag szilárdsági tulajdonságainak változékonyságához. Az Ashkenazi szilárdsági kritérium szerint meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok átlaga kicsit kisebb, mint 1, ami valószínűleg arra utal, hogy a szilárdsági tenzorok komponenseihez felhasznált technikai szilárdságok (Szalai 2001) kicsit eltértek Eberhardsteiner (2002) kísérletei során felhasznált faanyag szilárdságaitól. Megjegyezzük, hogy Eberhardsteinerék nem határozták meg külön az alkalmazott faanyaguk technikai szilárdságait, azokat a biaxiális kísérletekből számolták vissza.

Figyeljük meg a tönkremeneteli viszonyszámok alakulását térbeli feszültségi állapotok esetén! A von Mises elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok átlaga 0,42 és a variációs koefficiens 170,2%. A Tsai-Wu elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok átlaga 0,11 és a variációs koefficiens pedig 259,3%. Azonban az Ashkenazi elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok átlaga 1,05 a hozzá tartozó variációs koefficiens, pedig 16,1%. Bár a vizsgált próbatestek száma jelentősen kisebb, mint a síkbeli feszültségállapotok esetén a három elmélet közötti különbségek jelentősek.

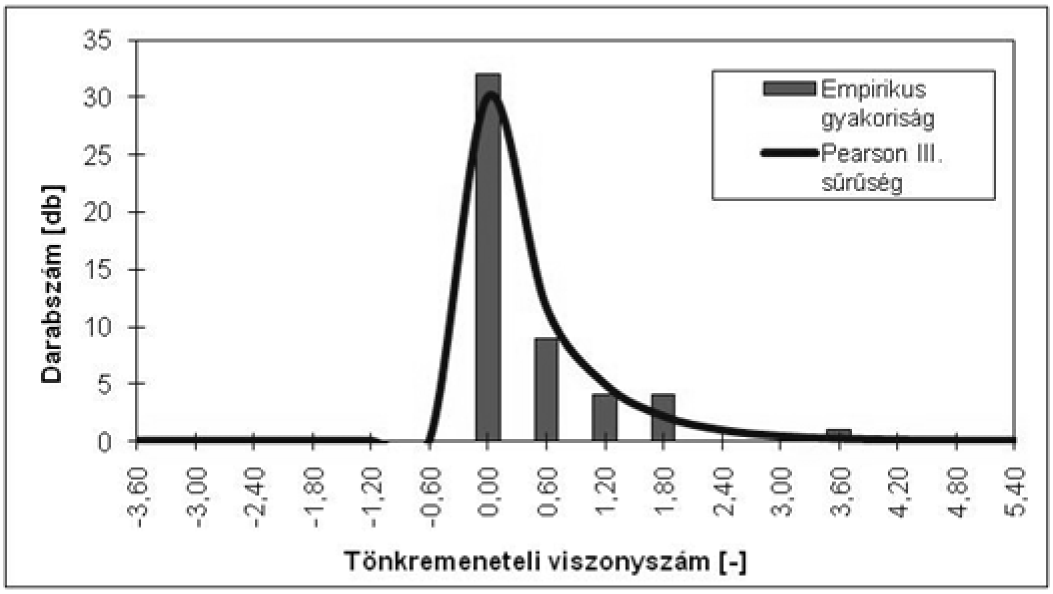
Mivel jelentős számú kísérleti eredményünk lett, ezért statisztikai vizsgálatot végeztünk, hogy meghatározzuk követnek-e valamilyen nevezetes eloszlást a tönkremeneteli viszonyszámok. Az eloszlásvizsgálatot valamennyi feszültségcsoportra elvégeztük mindhárom tönkremeneteli elméletnek megfelelően. A következőkben bemutatjuk a von

Mises, a Tsai-Wu, és az Ashkenazi elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok statisztikai kiértékelését az összes biaxiális és triaxiális feszültségállapot esetén.

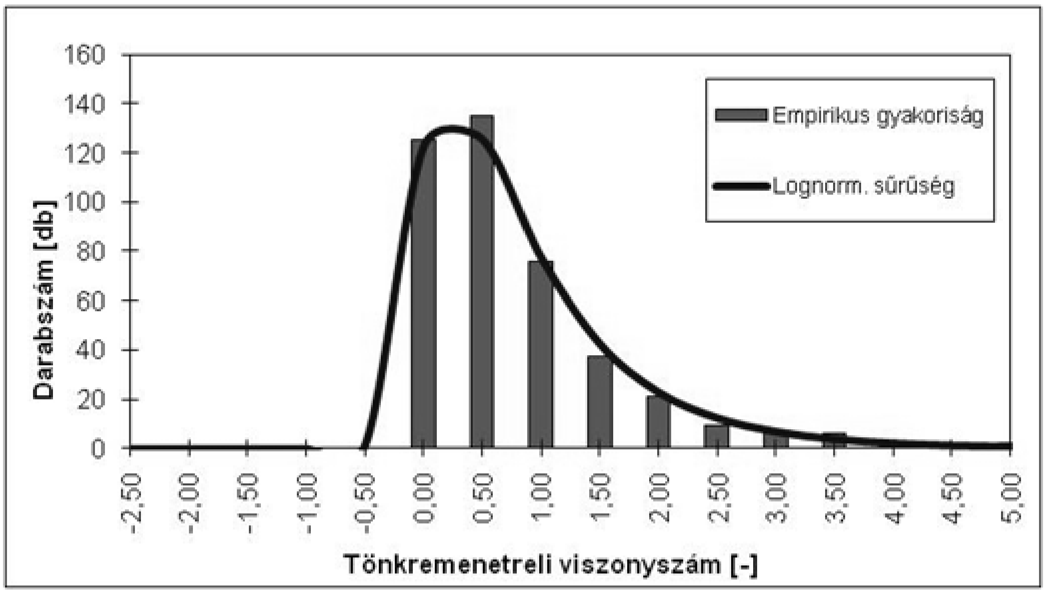
A von Mises szilárdsági kritériummal meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok síkbeli esetben 10,1%-os szignifikancia szinten lognormális eloszlást és térbeli esetben 14,2%-os szignifikancia szinten Pearson III. eloszlást követnek. A Tsai-Wu szilárdsági kritériummal meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok síkbeli esetben 23,3%-os szignifikancia szinten lognormális eloszlást és térbeli esetben 8,4%-os szignifikancia szinten Pearson III. eloszlást követnek. Az Ashkenazi szilárdsági kritériummal meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok síkbeli esetben 15,9%-os szignifikancia szinten lognormális eloszlást és térbeli esetben 79,8%-os szignifikancia szinten szintén lognormális eloszlást követnek.



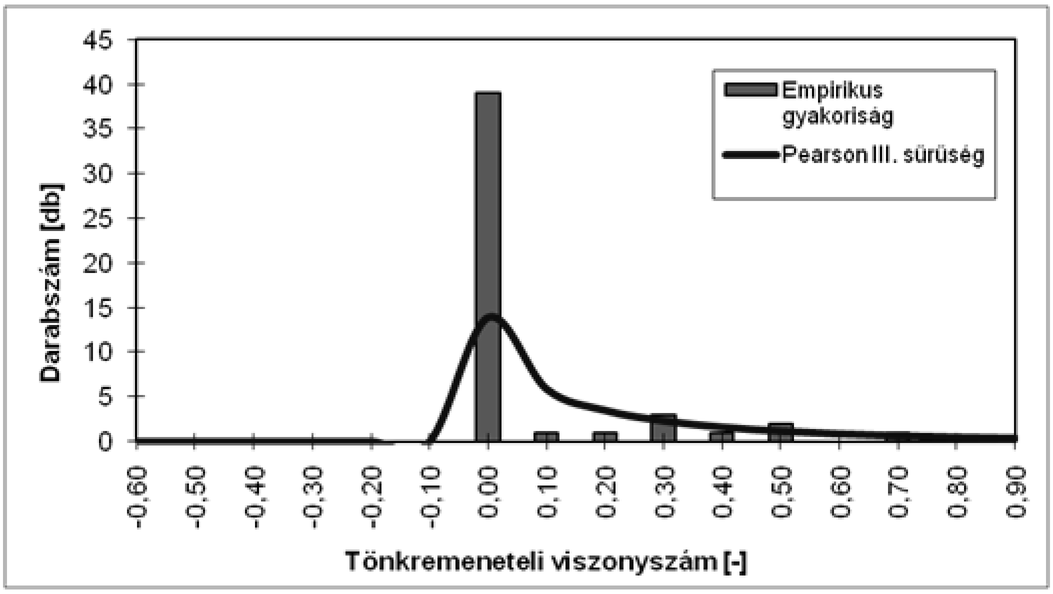
7.7. ábra: Lognormális sűrűségfüggvény illesztése a von Mises elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámokra az összes biaxiális feszültségállapot esetén. Szignifikanciaszint α= 10,1%



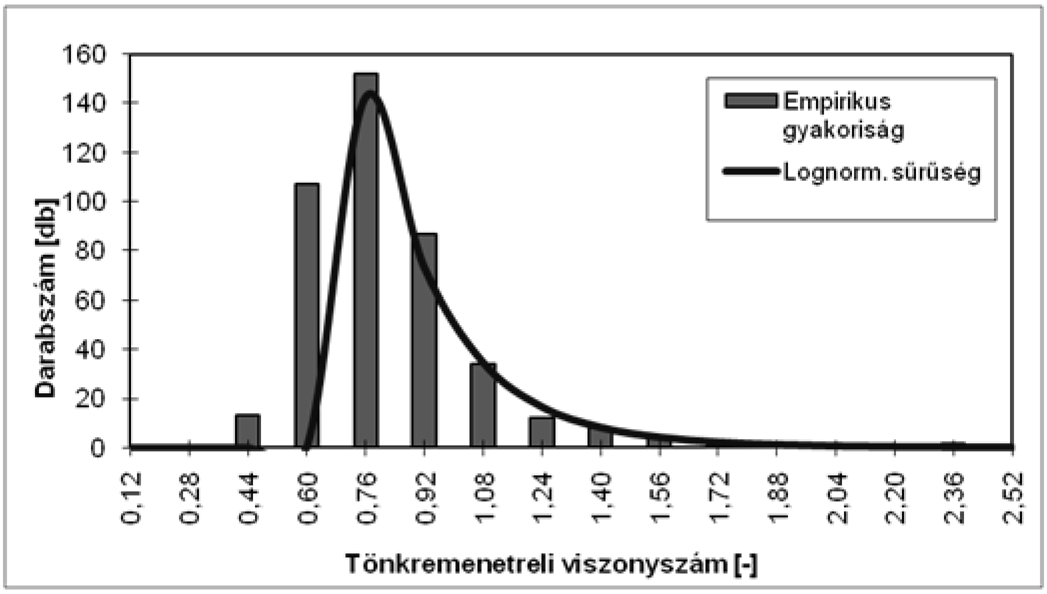
7.8. ábra: Pearson III. sűrűségfüggvény illesztése a von Mises elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámokra az összes triaxiális feszültségállapot esetén. Szignifikanciaszint α= 14,2%



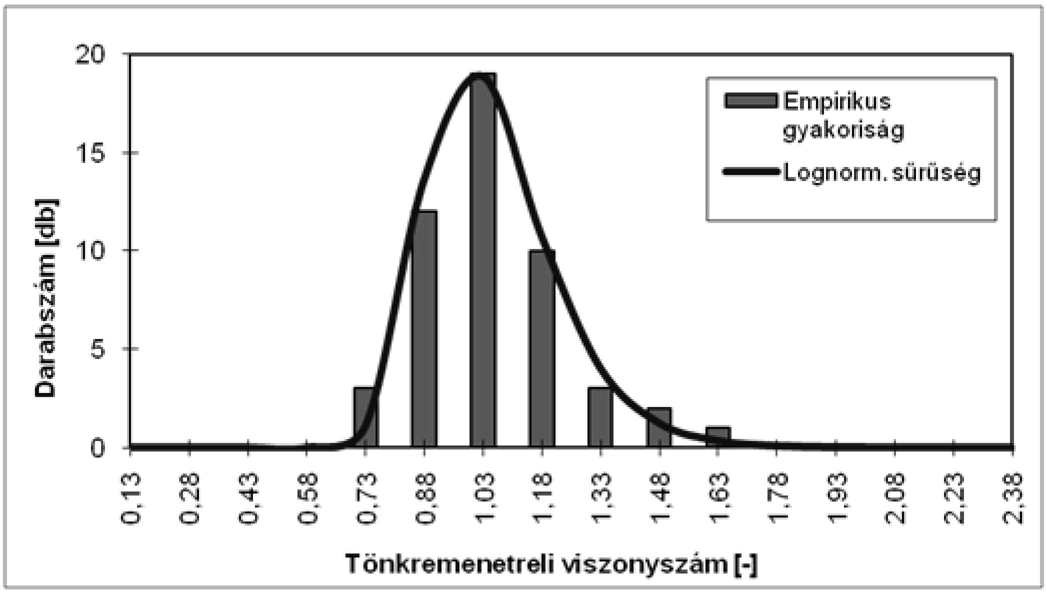
7.9. ábra: Lognormális sűrűségfüggvény illesztése a Tsai-Wu elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámokra az összes biaxiális feszültségállapot esetén. Szignifikanciaszint α= 23,3%



7.10. ábra: Pearson III. sűrűségfüggvény illesztése a Tsai-Wu elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámokra az összes triaxiális feszültségállapot esetén. Szignifikanciaszint α= 8,4%



7.11. ábra: Lognormális sűrűségfüggvény illesztése az Ashkenazi elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámokra az összes biaxiális feszültségállapot esetén. Szignifikanciaszint α= 15,9%



7.12. ábra: Lognormális sűrűségfüggvény illesztése az Ashkenazi elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámokra az összes triaxiális feszültségállapot esetén. Szignifikanciaszint α= 79,8%

Összefoglalva az eredményeket, az Ashkenazi elmélet helyességét az elméleti megfontolások (Szalai 1994, 2008) és a gyakorlati mérések segítségével, a következő indokok támasztják alá:

- Egytengelyű feszültségi állapotban a szilárdság orientációs változásának leírására az Ashkenazi elmélet a legalkalmasabb. (Azonban bizonyos feltételek fennállása esetén a három elmélet között csekély a különbség.)
- Energetikai szempontokat figyelembe véve, anizotrop anyagok tönkremenetelének leírására a von Mises és a Tsai-Wu elméletek elvileg helytelenek, mert azt mondják ki, hogy a tönkremenetel minden orientációnál azonos energiaszinten megy végbe, ami ellentmond a mindennapi tapasztalatnak.
- A von Mises és a Tsai-Wu elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok közül jelentős számú negatív értéket kaptunk, ami azt jelenti, hogy a tönkremeneteli elmélet nem írja le megfelelően a faanyag tönkremenetelét.
- A három tönkremeneteli elmélet közül valamennyi feszültségcsoportban egyedül csak az Ashkenazi elmélettel meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok értéke volt 1-hez közeli, nem is beszélve a variációs tényezőkről, amelyek csak az Ashkenazi elmélet esetén estek közel a faanyag természetes változékonyságának megfelelő szóráshoz.

8. A munkám alapján megfogalmazható tézisek

__1.Tézis__

Kidolgoztam egy eljárást a faanyagra alkalmazható tönkremeneteli elméletek kísérleti eredményeken alapuló összehasonlíthatóságára. Bevezettem az „*n*” tönkremeneteli viszonyszámot, amely a kísérletben meghatározott tönkremeneteli feszültségi állapot és az egyes szilárdsági elméletek által előre jelzett tönkremeneteli feszültségi állapot összehasonlítására szolgál.

A tönkremeneteli viszonyszám mind lineáris, mind síkbeli vagy térbeli feszültségi állapotban is alkalmazható.

Ha $n < 1$,

az elmélet szerint még nem kellett volna tönkremennie a próbatest anyagának,

ha $n = 1$,

az elmélet helyesen jósolta meg a tönkremenetel fellépését,

ha $n > 1$,

az elmélet szerint a próbatest anyagának már korábban tönkre kellett volna mennie.

2. Tézis

Levezettem azokat az összefüggéseket, amelyek megadják a napjainkban leginkább ismert és alkalmazott tönkremeneteli elméletek (von Mises, Tsai-Wu, Ashkenazi elmélet) és kísérleti eredmények alapján számítható tönkremeneteli viszonyszámokat.

A tönkremeneteli viszonyszámok meghatározási módja a következő az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelően:

von Mises elmélet:

$$n_{von\ Mises} = a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}, \qquad i,j,k,l = L,\ R,\ T$$

Tsai-Wu elmélet:

$$n_{Tsai\text{-}Wu} = a_{ij}\sigma^{ij} + a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}, \qquad i,j,k,l = L,\ R,\ T$$

Ashkenazi elmélet:

$$n_{Ashkenazi} = \frac{a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}}{\left|\sqrt{I_1^2 - I_2}\right|}, \qquad i,j,k,l = L,\ R,\ T$$

ahol,

$n_{von\ Mises}$, $n_{Tsai\text{-}Wu}$, $n_{Ashkenazi}$ – az egyes tönkremeneteli elméleteknek megfelelő tönkremeneteli viszonyszám,

a_{ij}, a_{ijkl} – a tönkremeneteli elméleteknek megfelelő szilárdsági tenzor,

σ^{ij} – a ható feszültségi állapot, ill. annak tenzora,

I_1 és I_2 – az első és második feszültségi invariáns.

3. Tézis

Bemutattam azokat az összefüggéseket, melyekkel adott anatómiai fősíkon ható feszültségállapotokat transzformálni lehet a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe. Továbbá levezettem, hogyan lehet transzformálni térbeli feszültségállapotokat abban az esetben, ha a próbatesteket egy olyan pallóból vágjuk ki, amelyben benne van az *L* anatómiai főirány.

4. Tézis

Lucfenyő faanyagra síkbeli feszültségállapotban meghatároztam a tönkremeneteli viszonyszámokat a három alapvető szilárdsági elmélet szerint. Elvégeztem a szilárdsági kritériumok ellenőrzésére szolgáló kiértékelést. A kiértékelés eredményeit a normálfeszültségek előjele alapján képzett feszültségcsoportokban a következő táblázatban foglaltam össze:

8.1. táblázat: A von Mises, a Tsai-Wu és az Ashkenazi szilárdsági kritériumok alapján meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok „n" statisztikai kiértékelése síkbeli feszültségállapotok esetén az egyes feszültségcsoportoknak megfelelően.

Feszültségállapotok		$n_{von\ Mises}$		$n_{Tsai\text{-}Wu}$		$n_{Ashkenazi}$	
Fesz. csoportok [-]	Darabszám [db]	Átlag [-]	CoV [%]	Átlag [-]	CoV [%]	Átlag [-]	CoV [%]
$\sigma^{LL+}\sigma^{RR+}$	145	0,99	72,1	1,14	97,6	0,87	28,2
$\sigma^{LL+}\sigma^{RR-}$	103	0,27	155,1	0,38	115,3	0,75	24,4
$\sigma^{LL-}\sigma^{RR-}$	113	0,48	215,5	0,47	165,5	0,88	35,0
$\sigma^{LL-}\sigma^{RR+}$	62	1,29	44,8	1,38	51,5	0,71	20,1
Összes fesz. áll.	423	0,73	114,5	0,81	114,4	0,82	30,3

5. Tézis

A síkbeli feszültségi állapotoknak megfelelő tönkremeneteli viszonyszámok statisztikai kiértékelése alapján megállapítottam, hogy a lucfenyő faanyag tönkremenetelét síkbeli feszültségi állapotban egyedül az Ashkenazi-féle elmélet tudja helyesen leírni.

6. Tézis

Kísérleteim segítségével meghatároztam különböző orientációjú lucfenyő faanyag triaxiális nyomószilárdságát. Az eredményeket felhasználva kiszámítottam mindhárom tönkremeneteli elméletnél a tönkremeneteli viszonyszámokat és ezeket statisztikailag kiértékeltem:

8.2. táblázat: A von Mises, a Tsai-Wu és az Ashkenazi szilárdsági kritériumok alapján meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok „n" statisztikai kiértékelése térbeli feszültségállapotok esetén.

	$n_{von\ Mises}$	$n_{Tsai\text{-}Wu}$	$n_{Ashkenazi}$
Darabszám [db]	50	50	50
Átlag [-]	0,42	0,11	1,05
CoV [%]	170,2	259,3	16,1

7. Tézis

Az újabb kísérleteknek megfelelő, egyes elméletek statisztikailag kiértékelt tönkremeneteli viszonyszámai alapján megállapítottam, hogy a lucfenyő szilárdsági viselkedésének leírására térbeli feszültségi állapotban egyedül az Ashkenazi-féle elmélet alkalmazható.

9. Konklúzió

Az elméleti megfontolások egyértelműen arra utalnak, hogy anizotrop anyagok (faanyagok) esetén csak az Ashkenazi-féle elmélet a helyes. Hiszen a von Mises és a Tsai-Wu elmélet azt mondja ki, hogy akármilyen is a feszültségi állapot orientációja, a faanyag mindig azonos kiegészítő munka elérésekor megy tönkre. Azonban tudjuk, hogy ez helytelen megállapítás. Ha egy rostirányú és egy sugárirányú (de egyébként ugyanolyan geometriai méretű) farudat húzunk, akkor a tönkremenetelig felhalmozott kiegészítő energia jelentősen különböző lesz. Ezt a tapasztalatot egyedül az Ashkenazi tönkremeneteli elmélet tükrözi. A kísérleti vizsgálatok akár a bécsi biaxiális, akár a triaxiális vizsgálatok az elmélettel összhangban azt mutatják, hogy valóban az Ashkenazi-féle elmélet írja le elfogadható valószínűségi szinten a tönkremenetelt.

Az elméletek vizsgálatára vonatkozó kísérleteinket egy olyan szerkezettel végeztük, amely ugyan három irányban terhel, de csak nyomófeszültségek létrehozására alkalmas. Ez azt jelenti, hogy a tönkremeneteli elméleteket csak egy korlátozott térbeli feszültségtartományban (minden normálfeszültség negatív) tudtuk ellenőrizni. A teherviselő faszerkezetek méretezése szempontjából megnyugtató lenne, ha a tönkremeneteli elméleteket a teljes értelmezési tartományon ellenőrizni lehetne. Ehhez egy olyan terhelő berendezést és próbatest-alakot kellene kidolgozni, amely lehetővé tenné, hogy a kritikus pontban teljesen általános térbeli feszültségállapotot lehessen létrehozni. Ezzel a technikával több fafajon ellenőrizni lehetne a tönkremeneteli elméleteket és végérvényesen meg lehetne győződni az Ashkenazi-féle elmélet helyességéről.

Sopron, 2012. április *Garab József*

10. Köszönetnyilvánítás

Elsősorban Szalai Professzor Úrnak köszönöm a támogatását, a jobb, tökéletesebb munkára való törekvést. A témavezetői segítségen kívül atyai jótanácsokkal is ellátott mióta elkezdtük a közös munkát a Tudományos Diákköri Konferenciákra való felkészüléssel. Úgy gondolom, hogy sikerült megfogadnom a mondandóit.

Szeretném megköszönni a Bécsi Műszaki Egyetem Építőmérnöki Karának dékánjának, Prof. Dr. Josef Eberhardsteinernek a támogatását, aki szintén jelentősen hozzájárult a doktori munkámhoz. Rendelkezésemre bocsátotta a biaxiális méréseinek adatait, valamint helyet nyújtott az intézetében, hogy elvégezzem a doktori kutatásomhoz szükséges triaxiális nyomóvizsgálatokat.

A matematikai problémák leküzdése Polgár Rudolf Tanár Úr segítsége nélkül nem sikerült volna, köszönet érte.

A benyújtott idegen nyelvű publikációm szakmai, nyelvi ellenőrzését köszönöm Dr. Varga Dénesnek és Dr. Richard von Fuchsnak.

Hálás vagyok Prof. Dr. Peter Niemznek a svájci Eidgenössische Technische Hochschule professzorának, aki fél évre befogadott a fafizikai kutatócsoportjába, ahol kutathattam a lucfenyő és a tiszafa mechanikai tulajdonságait.

Rendkívül sokat tanultam Dr. Daniel Keunecketől, Dr. Stefan Heringtől, Dr. Karin Hoffstettertől, Dr. Roland Reihsnertől és Dr. Micheal Dorntól a külföldön eltöltött időszakom alatt.

Külön köszönet Dr. Horváth Lászlónak, egyetemünk volt diákjának, a Virgina Tech oktatójának, valamint Kránitz Katalin ETH-s doktorandusznak, hogy a szükséges publikációkat a rendelkezésemre bocsátották valamint segítettek, tanácsokat adtak.

Egyetemünkről, a Doktori Iskolából sokat segített a munkámban Dr. Winkler András, Dr. Tolvaj László, Dr. Molnár Sándor, Dr. Hantos Zoltán, Dr. Karácsonyi Zsolt, Vanya Csilla, Csikós Szabolcs, valamint Takács Henriett.

A barátaimon kívül, természetesen köszönöm Verusnak, aki bátorított, támogatott az olykor rendkívül nehéz helyzetekben a disszertáció írása során.

A legtöbbel pedig a Szüleimnek tartozom, akik segítettek abban, hogy becsületes ember legyek.

11. Irodalomjegyzék

Ashkenazi, E.K., 1966: Protschnost' anisotropnüh drevesnüh i sintetitscheskih materialov [Strength of Anisotropic Wood and Synthetic Materials]. Isdaniia Lesnaya Promishlennost. Moscow, 226 o.

Ashkenazi, E.K., 1967: K voprosu o geometrii teorii protschnosti [Geometry of strength theory], Mekhanika Polimerov 3(4):703-707

Ashkenazi, E.K., 1976: Esso ras pro geometriu protschnosti anisotropnüh materialov [Further studies on the strength geometry of anisotropic materials], Mekhanika Polimerov 12(2):269-278

Ashkenazi, E.K., Ganov, E.V., 1972: Anisotropia konstrukzionnüh materialov [Anisotropy of structural material]. Leningrad, 165 o.

Bindzi, I., Samson, M., 1995: New formula for influence of spiral grain on bending stiffness of wooden beams, Journal of Structural Engineering 121(11):1541-1546

Bongers, J.P.W., Rutten, H.S., 1998: Concrete in multiaxial compression – a multilevel analysis, Heron 43(3):159-180

de Boer, R., 1982: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 260 o.

Eberhardsteiner, J., 2002: Mechanisches Verhalten von Fichtenholz – Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften. Springer-Verlag. Wien-New York, 174 o.

Ehlbeck, J., Hemmer, K., 1986: Ein Beitrag zur Vermessung des Tragfähigketnachweises bei Spannungskombinationen und zur Sammlung von Ausgangswerten für ein neues Sicherheitskonzept. Schlussbericht des Lehrstuhls für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität Karlsruhe

Elkadi, A.S., van Mier, J.G.M., 2006: Experimental investigation of size effect in concrete fracture under multiaxial compression, International Journal of Fracture 140:55-71

Garab, J., Karácsonyi, Zs., 2010: Engineering strength of European ash (*Fraxinus excelsior L.*), Proceedings of "Hardwood Science and Technology, the 4th Conference on Hardwood Research and Utilisation in Europe 2010 ", 35-39 o.

Goodman, J.R., Bodig, J., 1970: Orthotropic elastic properties of wood, Journal of Structural Division, ASCE 96(11):2301-2319

Hawking, S., 1998: A Brief History of Time From Bing Bang to the Black Holes. Updated and Expanded Tenth Anniversary Edition, Bantam Books, 279 o.

Hermanson, J.C., Stahl, D.C., Cramer, S.M., 1997: Transformation of elastic properties for lumber with cross grain, Journal of Structural Engineering 123(10):1402-1408

Kasal, B., Leichti, R.J., 2005: State of the art in multiaxial phenomenological failure criteria for wood members, Progress in Structural Engineering and Materials 7:3-13

Klingbeil, E.: 1966: Tensorrechnung für Ingenieure. Bibliographisches Institut Mannheim-Wien-Zürich, 197 o.

Kollmann, F., 1951: Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe. Band 1: Anatomie und Pathologie, Chemie, Physik, Elastizität und Festigkeit. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1050 o.

Molnár, S., 2004: Faanyagismeret. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó. Budapest, 471 o.

MSZ EN 14081-1: Faszerkezetek szilárdság szerinti osztályozása, négyszög keresztmetszetű szerkezeti fa. 1. rész: Általános követelmények. 2006. április.

Saliklis, E.P., Cramer, S.M., Hermanson, J.C., 1998: Measuring the triaxial load-deformation response of orthotropic materials subjected to large and small strain regimes, Journal of Testing and Evaluation 26(5):444-454

Sasaki, Y., Yamasaki, M., 2002: Fatigue strength of wood under pulsating tension-torsion combined loading, Wood and Fiber Science 34(4):508-515

Sasaki, Y., Yamasaki, M., 2004: Effect of pulsating tension-torsion combined loading on fatigue behavior in wood, Holzforschung 58(6):666-672

Sasaki, Y., Yamasaki, M., Akita, F., 2007: Fatigue behavior in wood under pulsating compression-torsion-combined-loading, Wood and Fiber Science 39(2):336-344

Sasaki, Y., Yamasaki, M., Sugimoto, T., 2005: Fatigue damage in wood under pulsating multiaxial-combined loading, Wood and Fiber Science 37(2):232-241

Sfer, D., Carol, I., Gettu, R., Etse, G., 2002: Study of the behavior of concrete under triaxial compression, Journal of Engineering Mechanics 128(2):156-163

Szalai, J., 1992: Indirekte Bestimmung der Scherfestigkeit des Holzes mit Hilfe der anisotropen Festigkeitstheorie, Holz als Roh- und Werkstoff 50:233-238

Szalai, J., 1994: A faanyag anizotrop rugalmasságtana. I. rész. A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája. Hillebrand nyomda. Sopron, 398 o.

Szalai, J., 1996: Az erdei fenyő (*Pinus sylvestris*) technikai szilárdságai, Bútor- és Faipar (6-7):14-15

Szalai, J., 1997: Technische Festigkeiten des Buchenholzes (*Fagus sylvatica*), Drevársky Vyskum (Wood Research), 42(3): 1-14

Szalai, J., 1998: Technische Festigkeiten der Akazie *(Robinia pseudo- Acacia)* und der Fichte *(Picea abies)*, Drevársky Vyskum (Wood Research), 43(3-4):39-61

Szalai, J.,1999: Technische Festigkeiten der Eiche *(Quercus robur)*. A Soproni Egyetem Tudományos Közleményei. (Scientefic Bulletin, University of Sopron), 42-45:189-198

Szalai, J., 2001: Különböző fafajok technikai szilárdságai . In: Mérnöki faszerkezetek. II. rész. (szerk. Wittman Gy.). Mezőgazdasági Szaktudás kiadó. Budapest

Szalai, J., 2005: Technische Festigkeiten der Pannonia Pappel *(Populus x euramericana cv. Pannonia)* und Zerreiche *(Quercus cerris L.)*, Acta Sylvatica Lignaria Hungarica 1:93-103

Szalai, J., 2008: Festigkeitstheorien von anisotropen Stoffen mit sprödem Bruchverhalten, Acta Sylvatica Lignaria Hungarica 5:61-80

Tsai, S.W., Wu, E.M., 1971: A general theory of strength for anisotropic material, Journal of Composite Materials (5): 58-80

Vágó, J., 2005: A faanyag tönkremeneteli elméleteinek kísérleti ellenőrzéséhez szükséges elméleti alapok, Faipar 53(2)11-17

von Mises, R., 1928: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 8 :161-185.

Yamasaki, M., Sasaki, Y., 2003: Elastic properties of wood with rectangular cross section under combined static axial force and torque, Journal of Materials Science 38(3):603-612

Yamasaki, M., Sasaki, Y., 2004: Yield behavior of wood under combined static axial force and torque, Experimental Mechanics 44(3):221-227

Függelék

A Függelék 1-4 táblázata bemutatja az összes síkbeli feszültségállapotot a tönkremenetelkor a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszerben (x^1, x^2) és átszámítva a faanyag anatómiai főtengelyeinek rendszerében (L, R) a rostirány függvényében (φ). Láthatók a meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok a von Mises (n_{vM}), a Tsai-Wu (n_{TW}) és az Ashkenazi (n_{Ash}) elméletnek megfelelően. Az egyes táblázatok a normálfeszültségek előjele alapján csoportosított feszültségi állapotok.

A Függelék 5. táblázata pedig bemutatja az összes térbeli feszültségállapotot a tönkremenetelkor a próbatest éleivel párhuzamos koordinátarendszerben (x^1, x^2 x^3) és átszámítva a faanyag anatómiai főtengelyeinek rendszerében (L, R, T) a rostirány (φ) és az évgyűrűállás függvényében (ψ). Láthatók a meghatározott tönkremeneteli viszonyszámok a von Mises (n_{vM}), a Tsai-Wu (n_{TW}) és az Ashkenazi (n_{Ash}) elméletnek megfelelően. Továbbá bemutatjuk mindegyik próbatest sűrűségét (ρ) és a nedvességtartalmát (u).

1. *táblázat: Eredmények a σ^{LL+} és σ^{RR+} feszültségcsoport esetén.*

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR}=\sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
1.	3,5571	4,7349	0,0	3,5571	4,7349	0,0000	0,77	0,76	0,89
2.	3,5506	6,0011	0,0	3,5506	6,0011	0,0000	1,19	1,33	1,12
3.	2,9966	5,0703	0,0	2,9966	5,0703	0,0000	0,85	0,85	0,95
4.	2,2163	4,1033	0,0	2,2163	4,1033	0,0000	0,55	0,45	0,76
5.	1,9007	3,8107	0,0	1,9007	3,8107	0,0000	0,47	0,35	0,71
6.	1,4269	4,7993	0,0	1,4269	4,7993	0,0000	0,71	0,64	0,87
7.	0,7307	4,3895	0,0	0,7307	4,3895	0,0000	0,57	0,46	0,78
8.	64,2523	4,0876	0,0	64,2523	4,0876	0,0000	3,47	5,09	1,60
9.	65,7183	2,5504	0,0	65,7183	2,5504	0,0000	2,51	3,48	1,39
10.	80,3339	3,5438	0,0	80,3339	3,5438	0,0000	4,09	5,94	1,77
11.	62,9242	2,0979	0,0	62,9242	2,0979	0,0000	2,09	2,82	1,29
12.	56,3667	2,9380	0,0	56,3667	2,9380	0,0000	2,27	3,19	1,30
13.	41,0956	1,8262	0,0	41,0956	1,8262	0,0000	1,08	1,37	0,91
14.	42,9304	1,4770	0,0	42,9304	1,4770	0,0000	0,99	1,23	0,88
15.	13,5898	5,3441	0,0	13,5898	5,3441	0,0000	1,40	1,79	1,08
16.	44,3436	4,7651	0,0	44,3436	4,7651	0,0000	2,72	3,97	1,40
17.	15,0881	4,7422	0,0	15,0881	4,7422	0,0000	1,23	1,55	0,99
18.	11,4491	4,3775	0,0	11,4491	4,3775	0,0000	0,95	1,12	0,89
19.	11,8731	3,9449	0,0	11,8731	3,9449	0,0000	0,83	0,95	0,82
20.	16,7590	5,5415	0,0	16,7590	5,5415	0,0000	1,64	2,17	1,15
21.	34,9608	5,2137	0,0	34,9608	5,2137	0,0000	2,44	3,53	1,33
22.	67,5081	3,7318	0,0	67,5081	3,7318	0,0000	3,41	4,97	1,59
23.	51,6700	3,8531	0,0	51,6700	3,8531	0,0000	2,58	3,72	1,37
24.	48,7087	4,2756	0,0	48,7087	4,2756	0,0000	2,67	3,88	1,39
25.	44,4964	4,0532	0,0	44,4964	4,0532	0,0000	2,31	3,32	1,29
26.	42,5918	3,9860	0,0	42,5918	3,9860	0,0000	2,17	3,10	1,25
27.	1,4419	4,6482	7,5	1,4965	4,5935	-0,4149	0,66	0,57	0,84
28.	1,4509	4,2853	7,5	1,4992	4,2370	-0,3668	0,56	0,46	0,78
29.	2,3554	5,8973	7,5	2,4158	5,8369	-0,4583	1,08	1,16	1,08
30.	1,3933	4,0260	7,5	1,4381	3,9812	-0,3407	0,50	0,38	0,73
31.	1,9606	4,5858	7,5	2,0053	4,5410	-0,3397	0,66	0,59	0,84
32.	1,6560	4,8322	7,5	1,7101	4,7781	-0,4110	0,72	0,65	0,87
33.	30,9855	2,9266	7,5	30,5075	3,4047	3,6311	1,49	1,95	1,02
34.	29,9739	3,2712	7,5	29,5190	3,7261	3,4556	1,57	2,08	1,05
35.	29,4130	2,7600	7,5	28,9589	3,2141	3,4492	1,34	1,72	0,96
36.	36,0424	0,9439	7,5	35,4444	1,5419	4,5421	1,03	1,19	0,83
37.	35,7954	1,6174	7,5	35,2131	2,1997	4,4230	1,25	1,54	0,92
38.	31,7094	1,2801	7,5	31,1910	1,7985	3,9378	0,93	1,09	0,79
39.	12,8617	5,9080	7,5	12,7432	6,0265	0,8999	1,66	2,15	1,20
40.	19,7408	4,6579	7,5	19,4839	4,9148	1,9519	1,54	2,03	1,09
41.	12,1705	3,2996	7,5	12,0194	3,4507	1,1480	0,70	0,77	0,74
42.	12,8581	4,0585	7,5	12,7082	4,2084	1,1388	0,96	1,13	0,88
43.	12,1153	4,7447	7,5	11,9897	4,8703	0,9538	1,16	1,41	0,99
44.	8,6860	4,1618	7,5	8,6089	4,2389	0,5855	0,81	0,88	0,84
45.	32,6822	2,9301	7,5	32,1753	3,4370	3,8502	1,59	2,10	1,05
46.	27,7874	4,1253	7,5	27,3842	4,5284	3,0621	1,81	2,45	1,14
47.	44,4739	2,9551	7,5	43,7665	3,6625	5,3729	2,39	3,25	1,28
48.	17,1590	3,3519	7,5	16,9237	3,5871	1,7868	0,93	1,12	0,83
49.	24,4837	3,4631	7,5	24,1256	3,8213	2,7203	1,34	1,73	0,98

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
50.	34,2690	2,6803	7,5	33,7308	3,2185	4,0879	1,58	2,07	1,04
51.	2,6287	4,3877	15,0	2,7465	4,2699	-0,4398	0,61	0,54	0,80
52.	2,3640	5,3960	15,0	2,5671	5,1929	-0,7580	0,88	0,88	0,97
53.	1,6997	5,0436	15,0	1,9237	4,8196	-0,8360	0,74	0,69	0,89
54.	1,7066	4,0083	15,0	1,8607	3,8541	-0,5754	0,48	0,36	0,72
55.	1,2575	4,9683	15,0	1,5060	4,7197	-0,9277	0,70	0,63	0,86
56.	2,0763	4,6158	15,0	2,2464	4,4457	-0,6349	0,64	0,57	0,83
57.	19,2798	1,4770	15,0	18,0873	2,6696	4,4507	0,87	0,97	0,77
58.	25,6685	3,0322	15,0	24,1522	4,5486	5,6591	1,93	2,48	1,17
59.	23,8691	3,1061	15,0	22,4782	4,4969	5,1907	1,77	2,26	1,13
60.	13,3064	1,8386	15,0	12,5382	2,6068	2,8670	0,57	0,58	0,65
61.	14,4535	1,9320	15,0	13,6147	2,7708	3,1304	0,66	0,69	0,69
62.	21,7636	0,8060	15,0	20,3598	2,2099	5,2394	0,89	0,97	0,76
63.	9,6440	3,0081	15,0	9,1995	3,4526	1,6590	0,63	0,64	0,72
64.	16,9022	3,3424	15,0	15,9939	4,2507	3,3900	1,22	1,48	0,97
65.	13,0669	2,5364	15,0	12,3615	3,2418	2,6326	0,72	0,77	0,74
66.	7,1918	5,1735	15,0	7,0566	5,3087	0,5046	1,10	1,26	1,02
67.	5,7666	3,8561	15,0	5,6387	3,9840	0,4776	0,63	0,61	0,77
68.	7,7049	3,9655	15,0	7,4544	4,2160	0,9349	0,77	0,81	0,83
69.	31,2164	-1,9411	15,0	28,9952	0,2801	8,2894	1,06	1,01	0,72
70.	34,6862	-2,1760	15,0	32,2169	0,2933	9,2155	1,31	1,27	0,80
71.	31,3959	-1,2637	15,0	29,2082	0,9240	8,1649	1,21	1,22	0,80
72.	28,8221	-1,6495	15,0	26,7809	0,3917	7,6179	0,93	0,89	0,68
73.	29,6153	-1,6631	15,0	27,5200	0,4321	7,8196	0,99	0,95	0,70
74.	29,0188	-1,8389	15,0	26,9518	0,2282	7,7144	0,91	0,86	0,67
75.	17,4897	4,1200	15,0	16,5941	5,0156	3,3424	1,54	1,95	1,10
76.	24,6612	2,0525	15,0	23,1467	3,5670	5,6522	1,48	1,81	1,01
77.	18,0002	3,6142	15,0	17,0365	4,5779	3,5965	1,40	1,75	1,04
78.	12,8105	2,6236	15,0	12,1281	3,3060	2,5467	0,72	0,78	0,75
79.	26,6803	1,9939	15,0	25,0266	3,6476	6,1716	1,66	2,04	1,06
80.	11,1989	3,1067	15,0	10,6568	3,6488	2,0230	0,75	0,80	0,78
81.	1,8042	4,7036	30,0	2,5290	3,9787	-1,2555	0,55	0,45	0,76
82.	2,1006	5,4623	30,0	2,9410	4,6219	-1,4556	0,74	0,70	0,88
83.	2,0641	5,4728	30,0	2,9162	4,6206	-1,4760	0,74	0,70	0,88
84.	1,8252	4,8608	30,0	2,5841	4,1019	-1,3144	0,58	0,49	0,78
85.	1,6505	4,6931	30,0	2,4111	3,9324	-1,3175	0,53	0,43	0,75
86.	1,8179	5,1039	30,0	2,6394	4,2824	-1,4229	0,63	0,56	0,82
87.	6,8025	1,2558	30,0	5,4159	2,6425	2,4018	0,38	0,28	0,58
88.	6,6261	1,9561	30,0	5,4586	3,1236	2,0222	0,46	0,38	0,65
89.	17,9051	6,3162	30,0	15,0079	9,2134	5,0181	3,80	5,29	1,87
90.	6,1784	1,6701	30,0	5,0514	2,7972	1,9522	0,38	0,28	0,58
91.	9,1728	1,9707	30,0	7,3722	3,7712	3,1186	0,74	0,74	0,81
92.	8,4281	2,1365	30,0	6,8552	3,7094	2,7244	0,68	0,66	0,78
93.	3,8645	4,1016	30,0	3,9238	4,0423	-0,1026	0,59	0,53	0,77
94.	3,0738	3,3106	30,0	3,1330	3,2514	-0,1025	0,38	0,26	0,62
95.	3,6681	3,8981	30,0	3,7256	3,8406	-0,0996	0,53	0,45	0,73
96.	3,4969	3,5989	30,0	3,5224	3,5734	-0,0441	0,46	0,37	0,68
97.	4,0962	4,7464	30,0	4,2587	4,5839	-0,2816	0,75	0,74	0,87
98.	3,2474	3,4250	30,0	3,2918	3,3806	-0,0769	0,41	0,30	0,64
99.	13,0287	-3,6794	30,0	8,8516	0,4976	7,2348	0,66	0,60	0,65
100.	14,1142	-4,2538	30,0	9,5222	0,3382	7,9536	0,78	0,73	0,69
101.	14,1197	-2,0673	30,0	10,0729	1,9795	7,0091	0,85	0,79	0,79

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
102.	15,1591	-1,5834	30,0	10,9735	2,6022	7,2497	1,04	1,02	0,89
103.	14,7035	-2,2269	30,0	10,4709	2,0057	7,3311	0,92	0,86	0,82
104.	13,1405	-1,9164	30,0	9,3763	1,8478	6,5198	0,74	0,67	0,74
105.	10,9331	-1,5009	30,0	7,8246	1,6076	5,3840	0,52	0,43	0,62
106.	13,1149	-2,3307	30,0	9,2535	1,5307	6,6882	0,71	0,64	0,71
107.	6,3502	2,4849	30,0	5,3838	3,4512	1,6737	0,52	0,45	0,69
108.	5,6368	3,0056	30,0	4,9790	3,6634	1,1394	0,54	0,48	0,72
109.	7,3192	2,8132	30,0	6,1927	3,9397	1,9512	0,68	0,66	0,79
110.	6,1840	2,3767	30,0	5,2322	3,3285	1,6486	0,48	0,41	0,67
111.	6,6051	2,8095	30,0	5,6562	3,7584	1,6435	0,60	0,56	0,75
112.	8,0412	1,4040	30,0	6,3819	3,0633	2,8740	0,52	0,45	0,67
113.	5,9102	2,0632	45,0	3,9867	3,9867	1,9235	0,62	0,56	0,79
114.	5,2003	1,7961	45,0	3,4982	3,4982	1,7021	0,48	0,38	0,69
115.	5,3670	1,0604	45,0	3,2137	3,2137	2,1533	0,43	0,31	0,65
116.	6,3273	1,4469	45,0	3,8871	3,8871	2,4402	0,62	0,55	0,79
117.	7,1955	1,9233	45,0	4,5594	4,5594	2,6361	0,83	0,83	0,91
118.	5,6148	1,9255	45,0	3,7702	3,7702	1,8447	0,55	0,47	0,74
119.	5,4056	0,9103	45,0	3,1579	3,1579	2,2477	0,42	0,30	0,65
120.	4,8762	0,8548	45,0	2,8655	2,8655	2,0107	0,34	0,21	0,59
121.	5,1361	1,5763	45,0	3,3562	3,3562	1,7799	0,44	0,34	0,67
122.	2,7093	3,0691	45,0	2,8892	2,8892	-0,1799	0,30	0,17	0,55
123.	2,8443	2,8213	45,0	2,8328	2,8328	0,0115	0,29	0,16	0,54
124.	2,4602	2,4790	45,0	2,4696	2,4696	-0,0094	0,22	0,08	0,47
125.	3,2247	3,2746	45,0	3,2496	3,2496	-0,0250	0,38	0,27	0,62
126.	3,0146	2,9866	45,0	3,0006	3,0006	0,0140	0,33	0,20	0,57
127.	2,0274	2,1825	45,0	2,1050	2,1050	-0,0775	0,16	0,02	0,40
128.	10,5224	-7,8387	45,0	1,3418	1,3418	9,1806	1,04	0,92	1,02
129.	9,6407	-6,3307	45,0	1,6550	1,6550	7,9857	0,83	0,70	0,91
130.	8,9075	-6,5507	45,0	1,1784	1,1784	7,7291	0,74	0,63	0,86
131.	8,7655	-5,1237	45,0	1,8209	1,8209	6,9446	0,68	0,54	0,82
132.	5,6043	-3,8580	45,0	0,8731	0,8731	4,7312	0,29	0,20	0,53
133.	7,6209	-5,3727	45,0	1,1241	1,1241	6,4968	0,53	0,43	0,73
134.	7,7425	-4,1712	45,0	1,7856	1,7856	5,9568	0,52	0,39	0,72
135.	7,9566	-3,4347	45,0	2,2609	2,2609	5,6957	0,56	0,42	0,75
136.	8,1766	-4,5242	45,0	1,8262	1,8262	6,3504	0,59	0,45	0,76
137.	8,1498	-4,1758	45,0	1,9870	1,9870	6,1628	0,58	0,44	0,76
138.	7,9910	-3,2789	45,0	2,3560	2,3560	5,6349	0,57	0,43	0,75
139.	6,7443	-4,0487	45,0	1,3478	1,3478	5,3965	0,40	0,29	0,63
140.	5,3142	2,8458	45,0	4,0800	4,0800	1,2342	0,62	0,57	0,79
141.	4,5954	2,9717	45,0	3,7835	3,7835	0,8118	0,53	0,45	0,73
142.	3,9965	2,4800	45,0	3,2383	3,2383	0,7583	0,39	0,27	0,62
143.	5,6484	3,2170	45,0	4,4327	4,4327	1,2157	0,73	0,71	0,85
144.	5,8609	1,3427	45,0	3,6018	3,6018	2,2591	0,53	0,44	0,73
145.	4,5039	2,7705	45,0	3,6372	3,6372	0,8667	0,49	0,40	0,70

2. táblázat: Eredmények a σ^{LL+} és σ^{RR-} feszültségcsoport esetén.

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
146.	39,4770	-7,1134	0,0	39,4770	-7,1134	0,0000	0,00	0,00	0,67
147.	51,5301	-9,6382	0,0	51,5301	-9,6382	0,0000	0,00	0,00	0,89
148.	44,3283	-6,4528	0,0	44,3283	-6,4528	0,0000	0,00	0,00	0,67
149.	32,1081	-7,0553	0,0	32,1081	-7,0553	0,0000	0,00	0,14	0,64
150.	27,9570	-6,5175	0,0	27,9570	-6,5175	0,0000	0,06	0,30	0,59
151.	30,6821	-5,9863	0,0	30,6821	-5,9863	0,0000	0,00	0,00	0,55
152.	70,4429	-3,0282	0,0	70,4429	-3,0282	0,0000	0,00	0,00	1,01
153.	69,3525	-3,7930	0,0	69,3525	-3,7930	0,0000	0,00	0,00	0,98
154.	44,6440	-5,4827	0,0	44,6440	-5,4827	0,0000	0,00	0,00	0,64
155.	51,3318	-6,6324	0,0	51,3318	-6,6324	0,0000	0,00	0,00	0,75
156.	46,2184	-4,4275	0,0	46,2184	-4,4275	0,0000	0,00	0,00	0,65
157.	39,9884	-2,5680	0,0	39,9884	-2,5680	0,0000	0,00	0,00	0,56
158.	52,4744	-7,0951	0,0	52,4744	-7,0951	0,0000	0,00	0,00	0,78
159.	36,3010	-5,5247	0,0	36,3010	-5,5247	0,0000	0,00	0,00	0,56
160.	65,3194	-7,2272	0,0	65,3194	-7,2272	0,0000	0,00	0,00	0,93
161.	55,8564	-6,4550	0,0	55,8564	-6,4550	0,0000	0,00	0,00	0,80
162.	36,5942	-5,0515	0,0	36,5942	-5,0515	0,0000	0,00	0,00	0,55
163.	41,2944	-6,4578	0,0	41,2944	-6,4578	0,0000	0,00	0,00	0,65
164.	52,8790	-3,7919	0,0	52,8790	-3,7919	0,0000	0,00	0,00	0,74
165.	55,7454	-4,4369	0,0	55,7454	-4,4369	0,0000	0,00	0,00	0,78
166.	63,6287	-3,6202	0,0	63,6287	-3,6202	0,0000	0,00	0,00	0,90
167.	54,3337	-3,6320	0,0	54,3337	-3,6320	0,0000	0,00	0,00	0,76
168.	42,4794	-4,4186	0,0	42,4794	-4,4186	0,0000	0,00	0,00	0,60
169.	44,2967	-4,5615	0,0	44,2967	-4,5615	0,0000	0,00	0,00	0,62
170.	64,5233	-2,1938	0,0	64,5233	-2,1938	0,0000	0,00	0,00	0,94
171.	59,7458	-2,2686	0,0	59,7458	-2,2686	0,0000	0,00	0,00	0,86
172.	63,7348	-3,1994	0,0	63,7348	-3,1994	0,0000	0,00	0,00	0,90
173.	44,7197	-2,9907	0,0	44,7197	-2,9907	0,0000	0,00	0,00	0,62
174.	39,0567	-4,0588	0,0	39,0567	-4,0588	0,0000	0,00	0,00	0,55
175.	44,7254	-3,2592	0,0	44,7254	-3,2592	0,0000	0,00	0,00	0,62
176.	57,5617	-1,1977	0,0	57,5617	-1,1977	0,0000	0,00	0,01	0,86
177.	57,7474	-0,9567	0,0	57,7474	-0,9567	0,0000	0,00	0,16	0,87
178.	55,3646	-1,4230	0,0	55,3646	-1,4230	0,0000	0,00	0,00	0,82
179.	47,1452	-2,0747	0,0	47,1452	-2,0747	0,0000	0,00	0,00	0,67
180.	34,0998	-1,8520	0,0	34,0998	-1,8520	0,0000	0,00	0,00	0,48
181.	49,2876	-1,5876	0,0	49,2876	-1,5876	0,0000	0,00	0,00	0,72
182.	27,1031	-7,3333	7,5	26,5164	-6,7466	4,4564	0,59	0,74	0,70
183.	23,4552	-4,7780	7,5	22,9742	-4,2970	3,6536	0,00	0,19	0,46
184.	24,4267	-5,4483	7,5	23,9177	-4,9393	3,8661	0,00	0,30	0,51
185.	26,5942	-6,0616	7,5	26,0378	-5,5053	4,2260	0,02	0,34	0,57
186.	31,3159	-4,0680	7,5	30,7131	-3,4652	4,5790	0,00	0,00	0,51
187.	26,2491	-5,9897	7,5	25,6998	-5,4405	4,1720	0,02	0,34	0,56
188.	61,6121	-6,6978	7,5	60,4483	-5,5340	8,8399	0,00	0,00	0,98
189.	66,0060	-7,2962	7,5	64,7571	-6,0473	9,4860	0,00	0,00	1,05
190.	64,0889	-4,7050	7,5	62,9168	-3,5330	8,9026	0,00	0,00	1,01
191.	37,7058	-5,5157	7,5	36,9695	-4,7793	5,5933	0,00	0,00	0,63
192.	36,5164	-5,3870	7,5	35,8024	-4,6731	5,4227	0,00	0,00	0,61
193.	28,6952	-4,0141	7,5	28,1379	-3,4568	4,2329	0,00	0,00	0,47
194.	49,7096	-6,1862	7,5	48,7573	-5,2339	7,2334	0,00	0,00	0,80
195.	50,6714	-5,4794	7,5	49,7147	-4,5228	7,2664	0,00	0,00	0,80

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
196.	33,3024	-5,5689	7,5	32,6401	-4,9067	5,0303	0,00	0,00	0,58
197.	40,1990	-5,5165	7,5	39,4201	-4,7377	5,9160	0,00	0,00	0,66
198.	41,5343	-6,3453	7,5	40,7186	-5,5296	6,1961	0,00	0,00	0,70
199.	37,2675	-6,2483	7,5	36,5262	-5,5069	5,6314	0,00	0,00	0,65
200.	63,2485	-2,7348	7,5	62,1243	-1,6106	8,5389	0,02	0,65	1,04
201.	60,6094	-1,4968	7,5	59,5513	-0,4386	8,0371	1,12	1,29	1,03
202.	52,1281	-3,3324	7,5	51,1832	-2,3875	7,1771	0,00	0,00	0,83
203.	62,7542	-2,9491	7,5	61,6348	-1,8297	8,5026	0,00	0,51	1,02
204.	54,0564	-2,8797	7,5	53,0864	-1,9097	7,3681	0,00	0,22	0,87
205.	60,4101	-2,9769	7,5	59,3301	-1,8970	8,2029	0,00	0,40	0,98
206.	46,3726	-0,9289	7,5	45,5667	-0,1231	6,1213	0,84	0,82	0,79
207.	52,5656	-1,0246	7,5	51,6526	-0,1115	6,9351	1,10	1,10	0,90
208.	49,6090	-1,0364	7,5	48,7461	-0,1736	6,5540	0,92	0,93	0,85
209.	37,0286	-2,4790	7,5	36,3555	-1,8059	5,1127	0,00	0,00	0,59
210.	39,6809	-1,9740	7,5	38,9712	-1,2643	5,3905	0,00	0,15	0,64
211.	40,3280	-1,2363	7,5	39,6199	-0,5282	5,3788	0,33	0,43	0,67
212.	1,6197	-4,5356	15,0	1,2074	-4,1232	1,5388	1,32	1,26	1,23
213.	8,5762	-4,7838	15,0	7,6813	-3,8888	3,3400	0,79	0,87	0,66
214.	10,3286	-4,6324	15,0	9,3264	-3,6302	3,7402	0,59	0,72	0,54
215.	6,3956	-5,2623	15,0	5,6147	-4,4813	2,9145	1,25	1,22	0,99
216.	5,1789	-6,0780	15,0	4,4249	-5,3239	2,8142	1,96	1,73	1,42
217.	6,9874	-5,5082	15,0	6,1504	-4,6712	3,1239	1,34	1,29	1,00
218.	35,5588	-5,9455	15,0	32,7785	-3,1653	10,3761	0,27	0,79	0,79
219.	26,0739	-5,6702	15,0	23,9475	-3,5438	7,9360	0,21	0,59	0,63
220.	39,2870	-7,8443	15,0	36,1298	-4,6871	11,7828	0,36	1,01	0,91
221.	34,5662	-5,0387	15,0	31,9132	-2,3856	9,9012	0,34	0,76	0,75
222.	23,4425	-5,0947	15,0	21,5309	-3,1831	7,1343	0,17	0,51	0,57
223.	31,1223	-5,3146	15,0	28,6815	-2,8738	9,1092	0,20	0,63	0,69
224.	36,5140	-5,6140	15,0	33,6920	-2,7920	10,5320	0,33	0,83	0,80
225.	30,7789	-5,9057	15,0	28,3215	-3,4483	9,1711	0,20	0,66	0,71
226.	37,2263	-8,3925	15,0	34,1704	-5,3366	11,4047	0,51	1,08	0,92
227.	23,5938	-5,9153	15,0	21,6170	-3,9386	7,3773	0,33	0,66	0,62
228.	27,2000	-5,3641	15,0	25,0186	-3,1827	8,1410	0,17	0,56	0,63
229.	22,5064	-4,0486	15,0	20,7275	-2,2698	6,6387	0,10	0,39	0,51
230.	35,0286	-3,3185	15,0	32,4599	-0,7497	9,5868	0,88	1,01	0,76
231.	28,4779	-2,7705	15,0	26,3846	-0,6772	7,8121	0,56	0,65	0,61
232.	31,7279	-3,7260	15,0	29,3529	-1,3510	8,8635	0,48	0,72	0,68
233.	26,6109	-2,7748	15,0	24,6424	-0,8064	7,3464	0,43	0,54	0,57
234.	28,1645	-2,3371	15,0	26,1213	-0,2939	7,6254	0,69	0,70	0,61
235.	24,5921	-2,2598	15,0	22,7934	-0,4611	6,7130	0,46	0,49	0,53
236.	25,8155	-5,2836	15,0	23,7323	-3,2003	7,7748	0,17	0,54	0,61
237.	25,0025	-4,9229	15,0	22,9979	-2,9182	7,4813	0,14	0,49	0,58
238.	23,0854	-5,4221	15,0	21,1758	-3,5125	7,1269	0,23	0,56	0,58
239.	6,6437	-6,2060	30,0	3,4313	-2,9935	5,5641	0,89	0,98	0,86
240.	6,8179	-7,6089	30,0	3,2112	-4,0022	6,2470	1,51	1,50	1,14
241.	4,3731	-5,4713	30,0	1,9120	-3,0102	4,2628	0,84	0,91	0,86
242.	4,4875	-6,3545	30,0	1,7770	-3,6440	4,6947	1,22	1,22	1,04
243.	3,7865	-5,4526	30,0	1,4768	-3,1428	4,0006	0,90	0,96	0,90
244.	3,3654	-5,5059	30,0	1,1475	-3,2881	3,8414	0,98	1,02	0,94
245.	13,9793	-6,5102	30,0	8,8569	-1,3878	8,8722	0,84	0,97	0,79
246.	10,5376	-4,8739	30,0	6,6847	-1,0210	6,6734	0,47	0,57	0,59
247.	11,2282	-5,1853	30,0	7,1248	-1,0820	7,1073	0,54	0,64	0,63
248.	12,3052	-4,4227	30,0	8,1232	-0,2407	7,2434	0,59	0,59	0,61

3. táblázat: Eredmények a σ^{LL-} és σ^{RR-} feszültségcsoport esetén.

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR}=\sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
249.	-42,8350	-4,8085	0,0	-42,8350	-4,8085	0,0000	0,00	0,00	1,08
250.	-44,3356	-3,9818	0,0	-44,3356	-3,9818	0,0000	0,00	0,00	1,06
251.	-43,1695	-5,1073	0,0	-43,1695	-5,1073	0,0000	0,00	0,00	1,11
252.	-49,3570	-5,4488	0,0	-49,3570	-5,4488	0,0000	0,00	0,00	1,24
253.	-39,5319	-5,1995	0,0	-39,5319	-5,1995	0,0000	0,00	0,00	1,06
254.	-42,5739	-4,4060	0,0	-42,5739	-4,4060	0,0000	0,00	0,00	1,05
255.	-33,9158	-5,0078	0,0	-33,9158	-5,0078	0,0000	0,00	0,00	0,95
256.	-36,0304	-4,4495	0,0	-36,0304	-4,4495	0,0000	0,00	0,00	0,94
257.	-36,6859	-5,5281	0,0	-36,6859	-5,5281	0,0000	0,00	0,00	1,04
258.	-36,1268	-4,8870	0,0	-36,1268	-4,8870	0,0000	0,00	0,00	0,98
259.	-37,4636	-4,4503	0,0	-37,4636	-4,4503	0,0000	0,00	0,00	0,97
260.	-7,7247	-3,6057	0,0	-7,7247	-3,6057	0,0000	0,00	0,03	0,57
261.	-35,9690	-5,4570	0,0	-35,9690	-5,4570	0,0000	0,00	0,00	1,02
262.	-34,5712	-0,4880	0,0	-34,5712	-0,4880	0,0000	0,00	0,00	0,71
263.	-42,9415	-1,3998	0,0	-42,9415	-1,3998	0,0000	0,00	0,00	0,91
264.	-42,8333	-0,4181	0,0	-42,8333	-0,4181	0,0000	0,00	0,15	0,88
265.	-42,1041	-0,1758	0,0	-42,1041	-0,1758	0,0000	0,39	0,49	0,86
266.	-41,2304	-0,3324	0,0	-41,2304	-0,3324	0,0000	0,08	0,24	0,84
267.	-45,8053	-0,0345	0,0	-45,8053	-0,0345	0,0000	0,79	0,82	0,93
268.	-6,6410	-8,8082	0,0	-6,6410	-8,8082	0,0000	3,73	2,58	1,84
269.	-6,5324	-7,6798	0,0	-6,5324	-7,6798	0,0000	2,58	1,86	1,55
270.	-5,3987	-9,4039	0,0	-5,3987	-9,4039	0,0000	4,96	3,46	2,10
271.	-3,9682	-4,7549	0,0	-3,9682	-4,7549	0,0000	1,00	0,95	0,96
272.	-3,5264	-5,7246	0,0	-3,5264	-5,7246	0,0000	1,78	1,50	1,26
273.	-2,7572	-5,6978	0,0	-2,7572	-5,6978	0,0000	1,95	1,65	1,32
274.	-30,3108	-3,3794	7,5	-29,8519	-3,8382	-3,4852	0,00	0,00	0,83
275.	-32,5546	-3,7036	7,5	-32,0631	-4,1952	-3,7336	0,00	0,00	0,90
276.	-29,5496	-4,0647	7,5	-29,1154	-4,4989	-3,2980	0,00	0,00	0,87
277.	-28,7636	-4,0305	7,5	-28,3423	-4,4519	-3,2007	0,00	0,00	0,85
278.	-28,6742	-4,0384	7,5	-28,2545	-4,4581	-3,1881	0,00	0,00	0,85
279.	-32,4682	-4,4216	7,5	-31,9904	-4,8994	-3,6295	0,00	0,00	0,95
280.	-30,8436	-4,2658	7,5	-30,3908	-4,7186	-3,4394	0,00	0,00	0,91
281.	-25,2879	-4,8495	7,5	-24,9397	-5,1977	-2,6449	0,00	0,00	0,87
282.	-26,9119	-4,1056	7,5	-26,5233	-4,4942	-2,9513	0,00	0,00	0,83
283.	-22,2879	-4,1365	7,5	-21,9787	-4,4458	-2,3490	0,00	0,00	0,76
284.	-22,1752	-4,1421	7,5	-21,8679	-4,4493	-2,3337	0,00	0,00	0,76
285.	-25,8367	-4,3459	7,5	-25,4706	-4,7120	-2,7811	0,00	0,00	0,83
286.	-36,0039	-0,6012	7,5	-35,4007	-1,2043	-4,5814	0,00	0,00	0,80
287.	-38,5868	-0,6506	7,5	-37,9405	-1,2969	-4,9093	0,00	0,00	0,86
288.	-34,4270	-1,1125	7,5	-33,8594	-1,6801	-4,3112	0,00	0,00	0,79
289.	-38,5341	-0,3425	7,5	-37,8834	-0,9931	-4,9424	0,00	0,00	0,85
290.	-29,9589	0,2658	7,5	-29,4440	-0,2492	-3,9114	0,20	0,33	0,65
291.	-38,6695	-0,4486	7,5	-38,0184	-1,0998	-4,9461	0,00	0,00	0,86
292.	-1,5822	-8,9823	7,5	-1,7082	-8,8562	0,9576	5,76	4,27	2,33
293.	-2,0990	-6,2683	7,5	-2,1701	-6,1973	0,5395	2,55	2,08	1,52
294.	-3,4131	-9,5179	7,5	-3,5171	-9,4139	0,7900	5,78	4,14	2,29
295.	-0,2108	-4,8741	7,5	-0,2903	-4,7946	0,6035	1,83	1,63	1,34
296.	-1,8316	-5,2777	7,5	-1,8903	-5,2190	0,4460	1,79	1,56	1,28
297.	-2,0796	-4,9785	7,5	-2,1290	-4,9291	0,3751	1,52	1,36	1,17
298.	-25,6151	-1,3707	15,0	-23,9910	-2,9948	-6,0611	0,00	0,00	0,76
299.	-18,9677	-1,2792	15,0	-17,7828	-2,4641	-4,4221	0,00	0,00	0,58

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
300.	-17,2179	-1,7782	15,0	-16,1837	-2,8125	-3,8599	0,00	0,00	0,57
301.	-22,0160	-1,1731	15,0	-20,6197	-2,5693	-5,2107	0,00	0,00	0,66
302.	-20,0738	-2,0692	15,0	-18,8677	-3,2752	-4,5012	0,00	0,00	0,67
303.	-23,6204	-1,1894	15,0	-22,1178	-2,6920	-5,6078	0,00	0,00	0,70
304.	-23,0131	-2,8298	15,0	-21,6611	-4,1818	-5,0458	0,00	0,00	0,80
305.	-18,8742	-1,9442	15,0	-17,7401	-3,0783	-4,2325	0,00	0,00	0,63
306.	-23,0267	-1,7048	15,0	-21,5984	-3,1331	-5,3305	0,00	0,00	0,71
307.	-20,7320	-2,1885	15,0	-19,4898	-3,4307	-4,6359	0,00	0,00	0,69
308.	-20,2633	-2,2220	15,0	-19,0548	-3,4305	-4,5103	0,00	0,00	0,68
309.	-20,9683	-2,6295	15,0	-19,7398	-3,8580	-4,5847	0,00	0,00	0,73
310.	-9,1664	-4,6243	15,0	-8,8622	-4,9286	-1,1355	0,05	0,15	0,81
311.	-8,0224	-3,6160	15,0	-7,7272	-3,9112	-1,1016	0,00	0,10	0,63
312.	-9,3475	-3,8721	15,0	-8,9807	-4,2389	-1,3688	0,00	0,00	0,68
313.	-8,7864	-4,3977	15,0	-8,4924	-4,6917	-1,0972	0,04	0,15	0,77
314.	-12,3457	-4,2305	15,0	-11,8021	-4,7742	-2,0288	0,00	0,00	0,76
315.	-10,2334	-4,1622	15,0	-9,8267	-4,5689	-1,5178	0,00	0,00	0,73
316.	-23,1588	0,8621	15,0	-21,5497	-0,7470	-6,0052	0,00	0,15	0,61
317.	-29,4231	0,5788	15,0	-27,4133	-1,4309	-7,5005	0,00	0,00	0,79
318.	-23,5425	0,3469	15,0	-21,9422	-1,2534	-5,9724	0,00	0,00	0,60
319.	-25,0721	0,2816	15,0	-23,3738	-1,4168	-6,3384	0,00	0,00	0,68
320.	-25,9758	0,0889	15,0	-24,2298	-1,6571	-6,5162	0,00	0,00	0,71
321.	-28,0733	0,0978	15,0	-26,1862	-1,7893	-7,0428	0,00	0,00	0,76
322.	-14,6406	3,5658	30,0	-10,0890	-0,9858	-7,8836	0,38	0,57	0,70
323.	-15,6838	3,6154	30,0	-10,8590	-1,2094	-8,3568	0,37	0,60	0,75
324.	-19,0049	4,9299	30,0	-13,0212	-1,0538	-10,3641	0,77	1,00	0,92
325.	-16,1609	3,5545	30,0	-11,2320	-1,3743	-8,5370	0,34	0,59	0,77
326.	-14,4623	2,8269	30,0	-10,1400	-1,4954	-7,4864	0,18	0,42	0,69
327.	-15,0449	3,9540	30,0	-10,2952	-0,7957	-8,2267	0,50	0,67	0,73
328.	-7,0351	-1,8963	30,0	-5,7504	-3,1810	-2,2252	0,07	0,25	0,56
329.	-8,4040	-2,5079	30,0	-6,9300	-3,9819	-2,5531	0,14	0,29	0,70
330.	-10,1636	-2,2316	30,0	-8,1806	-4,2146	-3,4346	0,05	0,22	0,75
331.	-6,8539	-2,5827	30,0	-5,7861	-3,6505	-1,8495	0,19	0,33	0,64
332.	-6,7485	-2,0761	30,0	-5,5804	-3,2442	-2,0232	0,10	0,27	0,57
333.	-14,9759	1,1042	30,0	-10,9559	-2,9159	-6,9629	0,00	0,17	0,76
334.	-14,2264	0,9804	30,0	-10,4247	-2,8213	-6,5847	0,00	0,16	0,72
335.	-15,4472	1,6218	30,0	-11,1799	-2,6454	-7,3911	0,00	0,23	0,76
336.	-15,3973	0,9591	30,0	-11,3082	-3,1300	-7,0825	0,00	0,14	0,78
337.	-16,1586	1,4669	30,0	-11,7522	-2,9395	-7,6321	0,00	0,20	0,80
338.	-14,3027	1,3955	30,0	-10,3781	-2,5290	-6,7975	0,00	0,21	0,71
339.	-3,3979	-4,1555	45,0	-3,7767	-3,7767	0,3788	0,53	0,61	0,73
340.	-2,8908	-3,5534	45,0	-3,2221	-3,2221	0,3313	0,39	0,50	0,62
341.	-4,1779	-4,0056	45,0	-4,0918	-4,0918	-0,0862	0,62	0,67	0,79
342.	-4,1151	-4,2468	45,0	-4,1809	-4,1809	0,0658	0,65	0,69	0,80
343.	-4,7543	-3,0825	45,0	-3,9184	-3,9184	-0,8359	0,58	0,64	0,76
344.	-3,9753	-3,7761	45,0	-3,8757	-3,8757	-0,0996	0,56	0,63	0,75
345.	1,7925	-7,4072	45,0	-2,8074	-2,8074	4,5998	0,54	0,67	0,73
346.	2,1730	-9,0618	45,0	-3,4444	-3,4444	5,6174	0,80	0,90	0,90
347.	2,0519	-8,9314	45,0	-3,4397	-3,4397	5,4917	0,79	0,89	0,89
348.	1,9139	-7,5073	45,0	-2,7967	-2,7967	4,7106	0,54	0,68	0,74
349.	1,7981	-7,1999	45,0	-2,7009	-2,7009	4,4990	0,50	0,64	0,71
350.	1,5622	-8,4713	45,0	-3,4546	-3,4546	5,0167	0,73	0,83	0,86
351.	5,8241	-9,7904	45,0	-1,9832	-1,9832	7,8073	0,85	0,98	0,92
352.	5,0618	-9,1484	45,0	-2,0433	-2,0433	7,1051	0,74	0,87	0,86

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
353.	4,9077	-10,1888	45,0	-2,6405	-2,6405	7,5483	0,91	1,05	0,96
354.	4,0253	-7,7214	45,0	-1,8480	-1,8480	5,8734	0,52	0,66	0,72
355.	4,8826	-7,6436	45,0	-1,3805	-1,3805	6,2631	0,52	0,64	0,72
356.	4,2817	-9,0391	45,0	-2,3787	-2,3787	6,6604	0,72	0,86	0,85
357.	7,0717	-9,0322	45,0	-0,9803	-0,9803	8,0519	0,78	0,88	0,88
358.	4,5564	-7,6816	45,0	-1,5626	-1,5626	6,1190	0,52	0,65	0,72
359.	5,5402	-8,8089	45,0	-1,6343	-1,6343	7,1745	0,69	0,82	0,83
360.	5,9861	-8,0140	45,0	-1,0140	-1,0140	7,0000	0,60	0,70	0,78
361.	6,0445	-6,4045	45,0	-0,1800	-0,1800	6,2245	0,45	0,47	0,67

4. táblázat: Eredmények a σ^{LL-} és σ^{RR+} feszültségcsoport esetén.

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
362.	-17,6695	4,6171	0,0	-17,6695	4,6171	0,0000	2,28	2,62	0,78
363.	-37,9969	3,1385	0,0	-37,9969	3,1385	0,0000	3,13	3,59	0,94
364.	-20,4818	4,1505	0,0	-20,4818	4,1505	0,0000	2,27	2,60	0,74
365.	-25,7548	3,9858	0,0	-25,7548	3,9858	0,0000	2,67	3,08	0,80
366.	-17,9266	4,1597	0,0	-17,9266	4,1597	0,0000	2,04	2,31	0,72
367.	-17,2655	3,6796	0,0	-17,2655	3,6796	0,0000	1,71	1,91	0,65
368.	-12,5527	3,8215	0,0	-12,5527	3,8215	0,0000	1,39	1,51	0,64
369.	-12,1272	4,5892	0,0	-12,1272	4,5892	0,0000	1,72	1,91	0,77
370.	-11,8705	4,7056	0,0	-11,8705	4,7056	0,0000	1,75	1,95	0,80
371.	-11,3305	5,1934	0,0	-11,3305	5,1934	0,0000	1,94	2,19	0,91
372.	-15,7335	3,8051	0,0	-15,7335	3,8051	0,0000	1,65	1,83	0,65
373.	-9,3162	4,1999	0,0	-9,3162	4,1999	0,0000	1,28	1,37	0,73
374.	-14,8684	5,7572	0,0	-14,8684	5,7572	0,0000	2,66	3,11	0,97
375.	-10,7058	4,5887	0,0	-10,7058	4,5887	0,0000	1,58	1,74	0,79
376.	-25,2613	2,0431	7,5	-24,7961	1,5779	-3,5335	1,21	1,32	0,63
377.	-29,7920	1,4322	7,5	-29,2600	0,9003	-4,0407	1,06	1,16	0,69
378.	-35,9503	2,0036	7,5	-35,3037	1,3570	-4,9116	1,75	1,91	0,85
379.	-18,0271	3,2992	7,5	-17,6638	2,9358	-2,7598	1,44	1,58	0,61
380.	-18,0452	2,3039	7,5	-17,6985	1,9572	-2,6334	0,97	1,04	0,52
381.	-33,9000	2,7361	7,5	-33,2758	2,1119	-4,7411	2,17	2,41	0,85
382.	-15,4795	3,4796	7,5	-15,1565	3,1566	-2,4535	1,35	1,47	0,60
383.	-16,9717	3,7381	7,5	-16,6189	3,3853	-2,6800	1,59	1,75	0,65
384.	-17,9090	4,4078	7,5	-17,5288	4,0276	-2,8880	2,02	2,27	0,74
385.	-13,2849	3,9535	7,5	-12,9912	3,6598	-2,2308	1,41	1,52	0,65
386.	-13,8953	2,9959	7,5	-13,6076	2,7081	-2,1859	1,04	1,09	0,52
387.	-14,7221	3,8084	7,5	-14,4063	3,4927	-2,3980	1,45	1,58	0,63
388.	-10,6658	4,3050	7,5	-10,4107	4,0499	-1,9374	1,35	1,45	0,71
389.	-6,1268	3,5592	7,5	-5,9618	3,3942	-1,2535	0,74	0,70	0,64
390.	-9,3169	3,7707	7,5	-9,0939	3,5478	-1,6937	1,04	1,06	0,62
391.	-7,3689	3,5168	7,5	-7,1834	3,3314	-1,4087	0,81	0,79	0,60
392.	-7,5051	4,6443	7,5	-7,2981	4,4373	-1,5723	1,23	1,28	0,86
393.	-4,4068	2,6242	7,5	-4,2870	2,5044	-0,9099	0,40	0,30	0,48
394.	-17,6353	2,3751	15,0	-16,2948	1,0347	-5,0026	0,75	0,78	0,53
395.	-18,3190	2,5796	15,0	-16,9190	1,1797	-5,2246	0,85	0,89	0,56
396.	-16,5534	2,3445	15,0	-15,2874	1,0786	-4,7245	0,70	0,72	0,50
397.	-18,0206	2,3364	15,0	-16,6569	0,9727	-5,0892	0,75	0,78	0,53
398.	-31,0855	2,6243	15,0	-28,8274	0,3662	-8,4275	1,36	1,43	0,83
399.	-15,8397	2,3616	15,0	-14,6204	1,1424	-4,5503	0,68	0,70	0,49
400.	-7,3629	4,8541	15,0	-6,5445	4,0358	-3,0542	1,09	1,10	0,83
401.	-9,2721	5,6078	15,0	-8,2753	4,6110	-3,7200	1,52	1,62	0,94

S.sz.	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	φ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	$\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$ [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
402.	-8,3787	4,9520	15,0	-7,4857	4,0590	-3,3327	1,20	1,23	0,82
403.	-10,6897	4,7224	15,0	-9,6573	3,6900	-3,8530	1,27	1,32	0,74
404.	-7,5566	4,5359	15,0	-6,7466	3,7259	-3,0231	1,00	0,98	0,76
405.	-8,9196	5,9617	15,0	-7,9228	4,9649	-3,7203	1,63	1,76	1,03
406.	-14,5219	4,0541	15,0	-13,2775	2,8098	-4,6440	1,25	1,31	0,64
407.	-14,9581	4,5013	15,0	-13,6546	3,1978	-4,8649	1,47	1,56	0,70
408.	-14,0903	3,5820	15,0	-12,9065	2,3982	-4,4181	1,04	1,07	0,58
409.	-12,4468	3,0715	15,0	-11,4073	2,0320	-3,8796	0,78	0,78	0,50
410.	-14,7731	3,4755	15,0	-13,5507	2,2531	-4,5622	1,04	1,07	0,58
411.	-14,9531	3,3382	15,0	-13,7278	2,1130	-4,5728	0,99	1,02	0,56
412.	-13,3790	7,1232	30,0	-8,2535	1,9976	-8,8777	1,36	1,32	0,95
413.	-11,2017	6,9896	30,0	-6,6539	2,4418	-7,8770	1,21	1,15	0,92
414.	-11,8984	6,8053	30,0	-7,2224	2,1294	-8,0989	1,20	1,14	0,90
415.	-6,4836	4,0080	30,0	-3,8607	1,3851	-4,5430	0,40	0,32	0,53
416.	-10,8087	4,1393	30,0	-7,0717	0,4023	-6,4727	0,56	0,56	0,60
417.	-8,9211	3,8878	30,0	-5,7188	0,6856	-5,5464	0,46	0,43	0,54
418.	-6,5057	5,7125	30,0	-3,4512	2,6580	-5,2907	0,70	0,59	0,77
419.	-7,5310	4,8319	30,0	-4,4403	1,7412	-5,3533	0,57	0,48	0,64
420.	-7,1439	5,8844	30,0	-3,8868	2,6274	-5,6414	0,76	0,66	0,79
421.	-5,9778	6,4866	30,0	-2,8617	3,3705	-5,3972	0,85	0,73	0,88
422.	-7,1488	5,0249	30,0	-4,1054	1,9815	-5,2714	0,59	0,50	0,66
423.	-7,0986	6,7774	30,0	-3,6296	3,3084	-6,0085	0,96	0,86	0,91

5. táblázat: A triaxiális vizsgálatok eredményei.

S.sz.	ρ [g/cm^3]	u [%]	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	σ^{33} [MPa]	φ [°]	ψ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{LR} [MPa]	σ^{LT} [MPa]	σ^{RL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	σ^{RT} [MPa]	σ^{TL} [MPa]	σ^{TR} [MPa]	σ^{TT} [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
1.	0,36	13,5	-0,5	-0,5	-26,45	0,0	90,0	-26,4494	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,76
2.	0,39	14,3	-0,5	-0,5	-33,45	0,0	90,0	-33,4480	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,93
3.	0,34	14,3	-0,5	-0,5	-30,45	0,0	90,0	-30,4517	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,96
4.	0,36	14,2	-0,5	-0,5	-30,94	0,0	90,0	-30,9439	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,93
5.	0,36	14,2	-0,5	-0,5	-31,47	0,0	90,0	-31,4703	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,94
6.	0,36	14,1	-0,5	-0,5	-30,55	0,0	90,0	-30,5492	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,92
7.	0,41	14,6	-1,0	-1,0	-35,02	0,0	90,0	-35,0226	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	0,99
8.	0,39	14,2	-1,0	-1,0	-36,52	0,0	90,0	-36,5165	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	1,04
9.	0,40	14,4	-1,0	-1,0	-32,84	0,0	90,0	-32,8368	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	0,94
10.	0,39	14,1	-1,0	-1,0	-35,89	0,0	90,0	-35,8926	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	1,03
11.	0,38	12,6	-1,0	-1,0	-23,51	0,0	90,0	-23,5082	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	0,67
12.	0,38	14,2	-1,0	-1,0	-34,14	0,0	90,0	-34,1356	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	1,01
13.	0,37	14,2	-1,5	-1,5	-34,19	0,0	90,0	-34,1907	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,09
14.	0,43	14,8	-1,5	-1,5	-37,92	0,0	90,0	-37,9171	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,07
15.	0,42	14,1	-1,5	-1,5	-39,65	0,0	90,0	-39,6487	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,10
16.	0,36	14,3	-1,5	-1,5	-31,50	0,0	90,0	-31,4999	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,06
17.	0,38	14,4	-1,5	-1,5	-33,72	0,0	90,0	-33,7196	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,07
18.	0,35	14,3	-1,5	-1,5	-31,42	0,0	90,0	-31,4236	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,08
19.	0,38	13,7	-0,5	-0,5	-21,94	17,8	90,0	-19,9346	-6,2398	0,0000	-6,2398	-2,5034	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,93
20.	0,42	14,0	-0,5	-0,5	-17,92	24,2	90,0	-14,9953	-6,5144	0,0000	-6,5144	-3,4277	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,95
21.	0,41	13,9	-0,5	-0,5	-18,04	19,8	90,0	-16,0387	-5,5790	0,0000	-5,5790	-2,5031	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,00	0,00	0,79
22.	0,36	14,0	-0,5	-0,5	-18,49	19,5	15,9	-16,4869	-1,5462	-5,4460	-1,5462	-0,6495	-0,5267	-5,4460	-0,5267	-2,3552	1,85	1,10	0,90
23.	0,36	14,1	-0,5	-0,5	-18,42	19,6	33,4	-16,4031	-3,1132	-4,7303	-3,1132	-1,1094	-0,9260	-4,7303	-0,9260	-1,9070	0,93	0,47	0,92
24.	0,38	13,8	-0,5	-0,5	-20,23	23,8	73,8	-17,0149	-6,9930	-2,0383	-6,9930	-3,4610	-0,8631	-2,0383	-0,8631	-0,7516	0,00	0,00	1,13
25.	0,44	13,6	-1,0	-1,0	-19,27	23,7	90,0	-16,3169	-6,7236	0,0000	-6,7236	-3,9515	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	1,00
26.	0,38	13,8	-1,0	-1,0	-17,93	23,0	90,0	-15,3571	-6,0795	0,0000	-6,0795	-3,5743	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	1,05
27.	0,39	13,8	-1,0	-1,0	-19,99	18,2	90,0	-18,1373	-5,6345	0,0000	-5,6345	-2,8525	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,00	0,00	0,91
28.	0,36	14,3	-1,0	-1,0	-18,52	23,8	3,9	-15,6758	-0,4392	-6,4425	-0,4392	-1,0131	-0,1928	-6,4425	-0,1928	-3,8282	3,30	1,57	1,13
29.	0,37	14,2	-1,0	-1,0	-17,09	23,4	49,4	-14,5531	-4,4498	-3,8206	-4,4498	-2,4609	-1,2544	-3,8206	-1,2544	-2,0770	0,00	0,00	1,08

S.sz.	ρ [g/cm^3]	u [%]	σ^{11} [MPa]	σ^{22} [MPa]	σ^{33} [MPa]	φ [°]	ψ [°]	σ^{LL} [MPa]	σ^{LR} [MPa]	σ^{LT} [MPa]	σ^{RL} [MPa]	σ^{RR} [MPa]	σ^{RT} [MPa]	σ^{TL} [MPa]	σ^{TR} [MPa]	σ^{TT} [MPa]	n_{vM}	n_{TW}	n_{Ash}
30.	0,37	14,3	-1,0	-1,0	-15,49	22,7	53,1	-13,3420	-4,1185	-3,0922	-4,1185	-2,3743	-1,0319	-3,0922	-1,0319	-1,7747	0,00	0,00	0,97
31.	0,41	13,9	-1,5	-1,5	-20,77	22,3	90,0	-17,9960	-6,7655	0,0000	-6,7655	-4,2747	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,14
32.	0,40	13,9	-1,5	-1,5	-16,99	24,1	90,0	-14,4203	-5,7660	0,0000	-5,7660	-4,0732	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,10
33.	0,45	13,7	-1,5	-1,5	-19,97	24,1	90,0	-16,8893	-6,8840	0,0000	-6,8840	-4,5793	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,00	0,00	1,10
34.	0,34	14,2	-1,5	-1,5	-13,62	24,9	39,8	-11,4745	-2,9606	-3,5597	-2,9606	-2,3788	-1,0566	-3,5597	-1,0566	-2,7704	0,29	0,00	1,11
35.	0,37	14,3	-1,5	-1,5	-11,51	24,5	46,6	-9,7886	-2,7423	-2,5978	-2,7423	-2,4073	-0,8595	-2,5978	-0,8595	-2,3142	0,00	0,00	0,90
36.	0,36	14,0	-1,5	-1,5	-17,59	28,9	38,6	-13,8421	-4,2418	-5,3137	-4,2418	-2,9579	-1,8263	-5,3137	-1,8263	-3,7877	1,90	0,31	1,46
37.	0,41	13,7	-0,5	-0,5	-9,01	45,5	90,0	-4,6788	-4,2523	0,0000	-4,2523	-4,8272	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	1,32	0,38	1,30
38.	0,45	13,6	-0,5	-0,5	-7,26	45,4	90,0	-3,8336	-3,3805	0,0000	-3,3805	-3,9280	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,69	0,16	0,97
39.	0,41	13,7	-0,5	-0,5	-8,61	44,5	90,0	-4,6239	-4,0525	0,0000	-4,0525	-4,4824	0,0000	0,0000	0,0000	-0,5000	1,05	0,25	1,19
40.	0,35	13,8	-0,5	-0,5	-8,26	45,9	91,3	-4,2645	-3,8769	0,0846	-3,8769	-4,4927	0,0871	0,0846	0,0871	-0,5019	1,61	0,46	1,44
41.	0,36	14,2	-0,5	-0,5	-8,43	47,7	90,9	-14,5531	-13,342	-17,9960	-13,3420	-4,1185	-6,7655	-17,996	-6,7655	0,0000	2,08	0,71	1,57
42.	0,44	13,6	-1,0	-1,0	-6,45	46,8	90,0	-3,5571	-2,7183	0,0000	-2,7183	-3,8896	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,53	0,00	1,00
43.	0,44	13,7	-1,0	-1,0	-6,74	44,0	90,0	-3,9700	-2,8681	0,0000	-2,8681	-3,7697	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,41	0,00	0,96
44.	0,42	13,3	-1,0	-1,0	-7,34	47,9	90,0	-3,8537	-3,1528	0,0000	-3,1528	-4,4831	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	0,88	0,06	1,20
45.	0,35	14,2	-1,0	-1,0	-6,71	43,3	93,5	-4,0293	-2,8443	0,1740	-2,8443	-3,6707	0,1633	0,1740	0,1633	-1,0100	0,58	0,00	1,18
46.	0,45	13,8	-1,5	-1,5	-6,57	47,8	90,0	-3,7939	-2,5254	0,0000	-2,5254	-4,2802	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,51	0,00	1,10
47.	0,43	13,7	-1,5	-1,5	-7,63	47,1	90,0	-4,3390	-3,0551	0,0000	-3,0551	-4,7877	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,75	0,00	1,28
48.	0,39	13,8	-1,5	-1,5	-6,33	49,0	90,0	-3,5777	-2,3901	0,0000	-2,3901	-4,2495	0,0000	0,0000	0,0000	-1,5000	0,71	0,00	1,27
49.	0,43	13,6	-1,5	-1,5	-6,57	48,3	33,3	-3,7436	-1,3825	-2,1047	-1,3825	-2,3519	-1,2969	-2,1047	-1,2969	-3,4744	1,14	0,27	1,00
50.	0,43	14,1	-1,5	-1,5	-5,33	44,8	61,5	-3,4298	-1,6804	-0,9143	-1,6804	-2,9633	-0,7961	-0,9143	-0,7961	-1,9332	0,33	0,00	0,90