

LŐRINCZ GYÖRGY

okl. építőmérnök

**DINAMIKUS HATÁSOK SZIMULÁCIÓJA
ÉS KÍSÉRLETI ELLENŐRZÉSE
FASZERKEZETŰ GERENDATARTÓKON**

DOKTORI (PH.D.) ÉRTEKEZÉS



Témavezető:

DR. RÓNAI FERENC

egyetemi tanár

Nyugat-Magyarországi Egyetem
Faipari Mérnöki Kar
Cziráki József Faanyagtudomány és Technológiák
Doktori Iskola

2007

**Dinamikus hatások szimulációja és kísérleti
ellenőrzése faszerkezetű gerendatartókon.**

Értekezés doktori (Ph.D.) fokozat elnyerése érdekében

Írta:

Lőrincz György okl. építőmérnök

Készült a Nyugat-Magyarországi Egyetem
Cziráki József Faanyagtudomány és Technológiák Doktori Iskola
Fa- és fatechnológiai tudományok programja keretében

Témavezető: **Dr. Rónai Ferenc** egyetemi tanár
Elfogadásra javaslom (igen / nem)

Dr. Rónai Ferenc

A jelölt a doktori szigorlaton % -ot ért el,

Sopron, 2007.

A Szigorlati Bizottság elnöke

Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom

Első bíráló (**Dr.**) igen /nem

Második bíráló (**Dr.**) igen /nem

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján.....% - ot ért el,

Sopron,

A Bírálóbizottság elnöke

A doktori (Ph.D.) oklevél minősítése.....

Az EDT elnöke

TARTALOMJEGYZÉK

KIVONAT	4
ABSTRACT	6
JELÖLÉSEK	7
1. BEVEZETÉS	9
1.1. A disszertáció célja	9
1.2. A tartó laboratóriumi mérései	11
1.3. Irodalmi áttekintés	13
1.3.1. Összetett keresztmetszetű fatartók számítása	13
1.3.2. Szerkezetek dinamikai viselkedése	19
1.3.3. Tartószerkezetek dinamikus vizsgálata	24
1.3.3.1. Általában	24
1.3.3.2. Magasépületek	24
1.3.3.3. Hidak	24
1.3.3.4. Faszervezetek	24
1.3.3.5. Dinamikai számítások, identitásvizsgálat	25
1.3.4. A hivatkozott irodalom felsorolása	30
2. A MÉRÉSRŐL	34
3. TARTÓSZERKEZETEK DINAMIKAI VISELKEDÉSE	40
3.1. Elméleti összefoglaló	40
3.1.1. Egyszabadságfokú diszkrét rendszer	41
3.1.2. Többszabadságfokú diszkrét rendszerek	45
3.1.3. A három szabadságfokú rezgő rendszer sajátfrekvenciáinak és módusainak számítása diszkrét modell segítségével	48
3.2. A labortartók dinamikai számításai	49
3.2.1. Az M tömegmátrix számítása	49
3.2.2. A H hajlékonysági vagy a K merevségi mátrix számítása	49
3.2.2.1. A sajátvektorok ismeretében	49
3.2.2.2. A sajátvektorok ismerete nélkül	50
4. ÖSSZETETT KERESZTMETSZETŰ TARTÓK	51
4.1. Szegecselt (csavarozott) hevederlemezzel erősített hengerelt szelvényű acélgerenda	52
4.2. Kétfás ill. többfás gerenda	56
4.3. Öszvértartó	59
5. A GERENDA STATIKAI VÁZÁNAK MEGHATÁROZÁSA	63
5.1. Az elcsúszások vizsgálata	63
5.1.1. Anyagjellemzők becslése	63
5.1.1.1. A K és a γ érték	63
5.1.1.2. Az E rugalmassági és a G nyírási modulus	66
5.1.2. Az elcsúszási görbék feldolgozása, levonható következtetések	67
5.2. A közbenső szakaszán kétfás tartó számítása	71
5.2.1. A számítási modell felvétele	71
5.2.1.1. A modell jellemzése	72
5.2.2. A mért lehajlások kiszámítása (e_6 , e_{45} , e_3)	73
5.2.2.1. Az $N(x)$ görbe szakaszainak csatlakozási feltételei	75

Nyugat-Magyarországi Egyetem Faipari Mérnöki Kar	DOKTORI (PH.D.) ÉRTEKEZÉS	Lőrincz György okl. építőmérnök
5.2.2.2.	Igénybevételek a külső teherből	77
5.2.2.2.1.	$\mathbf{M}(\mathbf{x})$ nyomatékok és $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ nyíróerők az F külső teherből	77
5.2.2.2.2.	Az $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ normálerőfüggvény	78
5.2.2.2.3.	A csúsztatóerők $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ függvénye az öszvértartón	79
5.2.2.2.4.	Az öszvértartó $\mathbf{M}_g(\mathbf{x})$ nyomatékfüggvénye	79
5.2.2.2.5.	Az öszvértartó $\mathbf{Q}_g(\mathbf{x})$ nyíróerőfüggvénye	80
5.2.2.3.	Igénybevételek a virtuális erőkből	81
5.2.2.4.	A lehajlások meghatározása	82
5.2.2.5.	A további vizsgálatokhoz szükséges eddigi eredmények	86
6.	A DINAMIKAI VIZSGÁLAT	87
6.1.	Tömegmátrix	87
6.2.	A merevségi mátrixok számítása	87
6.3.	A sajátétegzésszámok	90
6.3.1.	Meghatározásuk dinamikai mérésekkel	90
6.3.2.	A sajátfrekvenciák és a sajátlendés-alakok kiszámítása	94
6.4.	Sajátalakok	96
6.5.	Rezgésalak	98
6.6.	Következtetések	99
7.	ÖSSZEFOGLALÁS	105
7.1.	Laboratóriumi mérések	106
7.2.	A statikai váz meghatározása	107
7.3.	Dinamikus vizsgálatok és eredmények	112

Kötetek és mellékleteik

- **Disszertáció**
 - **CD lemez** a disszertáció tartalmával, valamint a gépi számításokkal
 - a **Tézisek** magyar és angol nyelven
- a Disszertáció **Melléklete**
 - szakirodalmi ismertetés a dinamikus hídvizsgálatokhoz
- a **Kísérleti jegyzőkönyv** kivonata
 - **Epilógus**
 - a kísérleti tartó **terve**.

A Disszertáció elkészítését az alábbi számítógépes programok segítették:

- **MS Word** szövegírás, szerkesztés
- **MS Excel** ábrázolás, táblázatfeldolgozás
- **Maple V és Maple 8** alkalmazott matematikai program
- **catman^o 2.2R2 és catman^o 5.0R3** mérési adatokat feldolgozó program
- **FEM – Design 5.0 és 6.0** statikai és dinamikai számítások
- **AutoCAD^o LT 2.0** ábrák rajzolása
- **Allprojekt** statikai számítások, ábrarajzolás

KIVONAT

A **Disszertáció**, a **Melléklet** és a **Kísérleti jegyzőkönyv** végigköveti egy gyakorlati minőségű és változtatható szerkezetű fatartó statikus és dinamikus laboratóriumi méréseit, a mérési eredmények feldolgozását. Felállítja a statikai vázat abból kiindulva, hogy a mért és a számított lehajlások egyenlők, és a tartó vázának és viselkedésének birtokában meghatározza az egyes állapotokban a dinamikai jellemzőket. – A változtathatóság annyit jelent, hogy a faszerkezet fokozatos elbontásával az alábbi tartók alakíthatók ki: 1/ A térben kitámasztott kettős feszítőmű – 2/ A kettős feszítőmű – 3/ Az egyszeres feszítőmű – 4/ A két-támaszú gerenda.

A disszertáció címe – *Dinamikus hatások szimulációja és kísérleti ellenőrzése faszerkezetű gerendatartókon* – kifejezi a munka jellegét. – A kísérletnek és a mérési eredmények feldolgozásának az volt a célja, hogy összevegyem egy számítás eredményeit a mért értékekkel, és a dinamikai jellemzőknek (sajátfrekvencia – csillapítás – sajátalak – rezgésalak) a tartó állapotának megváltozása okozta módosulásából a változás jellegére vonatkozó következtetéseket vonjak le. – Elképzeléseim csak részben valósultak meg, ugyanis a tiszta szerkezet elmélete nem tudja követni a kísérleti mérés céljára nem finomított mindennapi faszerkezet pontatlanságait és egyenetlenségeit. – Illetőleg tudná, de a számítás ezen esetben gyakorlatilag ellehetetlenülne. A cél pedig éppen egy bárhol elkészített faszerkezet vizsgálata és diagnózisa volt.

A **Disszertáció 1. fejezete** a célkitűzéssel, a mérés rövid és a szakirodalom részletes és kiterjedt ismertetésével foglalkozik.

A **2. fejezet** részletesen leírja az elvégzett méréseket és a mért lehajlások jellegét mindegyik tartón. Ezen tartóknak része a gerenda, amelynek középső 7/10-e kétfás, a két vége pedig egyfás. A két fa egymáson való elcsúszása (**K** elcsúszási modulus), valamint a felső gerenda rálapolásos toldásában a relatív elfordulás (**k** rugóállandó) az átmenő csavarok segítségével változtatható.

A **3. fejezet** diszkrét modellen ismerteti a tartószerkezetek dinamikájának elméletét általában, a csillapítás elhanyagolását, és főként a csillapítás nélküli szerkezetek dinamikai jellemzőinek számítását. Majd a jelen esetben alkalmazott három szabadságfokú modell megoldását.

A **4. fejezet** az összetett keresztmetszetű tartók megoldását tárgyalja. Az egykori szegecselt és hevederlemezzel erősített acélgerenda, a két- ill. többfás fagerenda és a beton-acél öszvértartó megoldása annyiban tér el az egyszerű keresztmetszetű tartókétől, hogy a külső erők okozta nyomatóköt az egymáson elcsúszó gerendákban keletkező normálerő módosítja.

Az **5. fejezetben** a középső szakaszán kétfás fagerenda statikai vázát és az **N(x)** normálerőfüggvény másodrendű differenciálegyenletét határoztam meg. Majd ennek ismeretében kiszámítottam a tartón keletkező igénybevételeket a külső teherből és az egységteherből, végül a lehajlásokat munkatétellel. A tartóra érvényes és a lehajlások számításánál alkalmazott állandókat a Melléklet tartalmazza. Az állandók számításához a mért elcsúszások feldolgozására és jellegének megismerésére is szükség volt.

Eredetileg mindegyik tartó statikai vázának meghatározását terveztem. De csak egyet, a kéttámaszú gerendát dolgoztam fel. A többivel sem terjedelemben, sem időben nem volt lehetőségem foglalkozni a mért sajátfrekvenciáik kivételével.

A **6. fejezet** foglalkozik a kéttámaszú tartó számított dinamikai jellemzőivel és mindegyik tartó mért sajátfrekvenciáinak meghatározásával. A mért és a számított értékek összehasonlítása, a mért értékek változásának elemzése a fatartók egyes állapotaiban az alábbi következtetések levonását tette lehetővé:

- a mért rezgésgyorsulásokból meghatározott kitérésű függvények és a számítottak összehasonlíthatatlanok, ugyanis a csillapítás nem állandó, látszólag hektikusan változik, így matematikailag leírhatatlan;
- a sajátfrekvenciák 1% alatti változásából következtetés nem vonható le. A sajátfrekvenciák most megfigyelt változásai legalább 3% körül vannak, de a változások nagysága esetenként a 10% körüli értéket is eléri;
- a sajátfrekvenciák változásának iránya (nö/csökken) nem egységes, jóllehet minden szerkezeti változtatás a hajlékonyság növekedését, azaz a merevség csökkenését jelentette. Szerkezeti változáshoz ezek további megfontolások nélkül egyértelműen nem rendelhetők hozzá;
- a dinamikai változások és a szerkezeti változások közötti esetleges összefüggés elméletileg nem általánosítható. Ugyanis a hajlékonyság/merevség természetes és időfüggő módosulásán kívül sem az **M** tömegmátrix, sem a **D** csillapítási mátrix nem állandó. Ezek változása viszont nem mérhető. Az egyes mátrixok hatása a dinamikai jellemzők változására eltérő. Az **M** nagysága döntő, a **D** a számításokban általában elhanyagolható;
- a számítások szempontjából döntő a tartó linearitása. A lineáris modell nagy terhekre biztosan igaz, de kisebb terhekre, kis gerjesztésekre a fatartók nem lineárisak. A számított és a mért értékek összevetéséből egyértelmű következtetések levonhatósága kérdéses;
- a dinamikai megfigyelés eszköze csak a mérés lehet. (Ugyanis a kis változások számításokkal nem követhetők, ill. kis változásokat a tartó meghibásodás nélkül is produkál. A mérési eredményeket is csak nagy tömegű, egyszerű statikai vázzal felírható tartóknál szabad az idő múlásával összehasonlítani. – A pontos dinamikai mérésekhez pontos és reprodukálható, beállítható frekvenciájú gerjesztés kell.

A Disszertáció **Melléklete** az anyagjellemzők, a tartószerkezeti és geometriai jellemzők meghatározását tartalmazza. Ebben a kötetben kerültek feldolgozásra az elcsúszások, a lehajlások és a sajátfrekvenciák., valamint a hajlékonysági mátrixok számítása, a konkrét dinamikai számítások és számpéldák is itt találhatók.

A **Kísérleti jegyzőkönyv** a négy tartó statikus és dinamikus mérési eredményeit sorolja fel. A mellékelt kötetből az 1/, 2/ és 3/ jelű tartók statikus méréseinek eredményeit terjedelmi okokból kihagytam. A dinamikai válaszjeleket és a frekvenciaspektrumokat ábrázoltam. Ezek az ábrák továbbdolgozásra alkalmatlanok! A válaszjeleket a **catman**® által értelmezhető formátumban a *Disszertáció* kötethez mellékelt CD lemez tartalmazza.

Elért eredményeim:

- négy változtatható állapotú (elcsúszás és relatív elfordulás) részben kétfás fatartó statikus (lehajlások és elfordulások) és dinamikus (rezgésgyorsulás válaszfüggvények) laboratóriumi mérése, a mérési eredmények további használatra alkalmas feldolgozása;
- a részben kétfás gerenda statikai vázának felállítása mérési eredmények alapján, a kétfás szakaszon keletkező **N(x)** normálerőre vonatkozó differenciálegyenlet felírása. A lehajlások meghatározása a munkatétel felírásával. Ismeretlen jellemzők meghatározása;
- annak bemutatása, hogy a szerkezet változásai a tartó dinamikai tulajdonságait (sajátfrekvencia, sajátalak, rezgésalak) befolyásolják. Megállapítható, hogy a vizsgálat célja – a szerkezeti változásokat/hibákat hozzuk egyértelműen összefüggésbe a dinamikai változásokkal – nehezen érhető el. Az összefüggés létezik, de számításokkal nehezen követhető. Legalábbis kétfás fatartók esetében.

ABSTRACT

The Ph.D. thesis *Simulation and experimental monitoring of dynamic effects on timber construction beams* discusses its subject through the statical and dynamical laboratory measurement results and their data processing, along with the setting up of the working line, in the case of a timber construction of practical quality which works as a timber girder in its detachably structured part. Proceeding from the point that the measured and calculated stoops are equal, the dynamic features are defined upon the frame and the behaviour of the girder in each of the below detailed states, where the slipping of the two timbers and the relative rotation of the adjustable swivel connection are variable values. By the gradual disassembly of the timber construction, the following girders can be formed, which were measured in a comparable way to each other:

1. Cross spanning doubled truss
2. Twin truss frame work
3. Simple truss frame work
4. Simple beam

The title of the laboratory measurement– *Laboratory examination of a timber construction under statical and dynamic load* – expresses well the essence of the work. The purpose of the experiment itself and the data processing of the measurement results was to compare the calculated results with the measured values, as well as to conclude predictions referring to the character of the alteration upon the changes in the dynamic features (i.e. eigenfrequency – damping – mode – vibration shape) resulting from the modified state of the girder.

The above ideas could partly have been turned into practice, as the theory of solid structures cannot be completely aligned with the inaccuracies and inhomogeneous properties of a usual timber construction not specifically refined for experimental measuring purposes. – However, it could theoretically do it, but then the complexity of the calculation would make it practically unexecutable. In contrast with that, my goal was to focus on the examination and diagnosis of timber constructions built under usual circumstances. – Nevertheless, the so modified state of a girder is detectable indeed, but it cannot be formulated with theoretical accuracy. Consequently, the natural aging and consecutive decay of a timber construction, along with its failures formed in the meantime, cannot be identified more accurately with dynamic examination.

JELÖLÉSEK

JELÖLÉS	MÉRTÉKEGYSÉG	JELENTÉS
$U, T; W, W_k, W_b$	N·mm	potenciális energia, kinetikus energia, mechanikai munka; külső és belső munka
$t, t_1, t_2, \Delta t, T$	sec	idő, időpont, időkülönbség, periódusidő
$w(t), \underline{w}(t)$	mm	anyagi pont egyirányú elmozdulása
$\overset{g}{w}(t), \overset{g}{\dot{w}}(t)$	mm/s, mm/s ²	az egyirányú elmozdulás sebessége és gyorsulása
w_0, v_0	mm, mm/s	kezdeti elmozdulás és sebessége
m, d, d_{ekv}, k	$t_0, N \cdot s/mm, N/mm$	tömeg, csillapítás, rugóállandó (anyagi pont)
$\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{D}}, \underline{\underline{K}}$		tömeg-, csillapítási és merevségi mátrix (rendszer)
$\underline{H}, [e_{ij}]$	mm/N, m/N	a hajlékonysági mátrix és elemei, azaz : a j pontban ható egységerő hatására az i pont elmozdulása
$\underline{K}, [k_{ij}]$	N/mm, N/m	a merevségi mátrix és elemei, azaz : az i pontban szükséges erő ahhoz, hogy a j pont egységnyit mozduljon el
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$		sajátértékek általában
$\underline{v}, \underline{v}_r, \underline{v}_p, \underline{v}_q$		sajátvektorok
$\omega, \omega_0, \omega_{0n}, \omega_0^*$	1/s	körfrekvencia
$f, f_0, f_{0r}, f_0^*, f_i$	1/s	rezgésszám
ϑ		logaritmikus dekrementum
φ	rad	fázisszög
$\alpha, \gamma, \nu, \kappa$		összefoglaló és helyettesítő jelölések
E, E_0	N/mm ²	rugalmassági modulus
G, G_0	N/mm ²	nyírási modulus
K	N/mm ²	elcsúszási modulus
γ^2	1/mm ²	elcsúszási reláció
C, C_i	N/mm	csúszási ellenállás
F	N, kN	koncentrált külső erő (teher)
$z(t), w(t)$	mm	pont rezgésének amplitúdója, út
I	mm ⁴ , cm ⁴ , m ⁴	tehetetlenségi nyomaték
$h, A, S_s, W, I_1, I_2, I_s$	mm, mm ² , mm ³ , mm ⁴	km. geometriai jellemzői (a km. magassága, területe; statikai nyomaték, keresztmetszeti tényező, inercia)
Θ, k	rad, kN/rad	a rug. csukló (toldás) elfordulásának jellemzői
l, l, L	mm, m	a tartó támaszköze
$t_1, t_2, t_3, t_{45}, t_6, t_7, t_8$	mm, m	keresztmetszetek távolsága balról

JELÖLÉS	MÉRTÉKEGYSÉG	JELENTÉS
$\xi = x/l$		balról vett relatív távolság
$x_c = \xi_c \cdot l$	mm, m	a rugalmas csukló távolsága a baloldali támasztól
$N(x), L(x), L_i$	N, kN	az öszvértartókban keletkező normálerő
$T(x)$	N/mm, kN/m	fajlagos csúsztatóerő
$M(x), M_i, M_{0i}$	Nmm, kNm	függ. síkú hajlítónyomaték
$Q(x)$	N, kN	nyíróerő
α	1/mm ³	differenciálegyenlet állandó együtthatója
γ	1/mm	az elcsúszásra jellemző szám
$\Delta u_{k,i}(\xi)$ $u_{k,i}(\xi)$	mm	a „ k ” állapotú tartó valamely keresztmetszetének relatív megcsúszása i nagyságú konc. erő hatására
M	mmNn, kNm	a rugalmas csukló elfordulása miatti koncentrált nyomatékváltozás a tartó ξ_c abszcisszájú km.-ében
$\alpha_i, \bullet, \beta, \bullet$		a statikai váz meghatározásánál kiszámított módosító tényezők (M20., M21., M22. táblázat)
K_1, K_0	N/mm ²	az egyfás és kétfás hajlítási merevség
$\underline{S}, \underline{S}^*$		a sajátvektorok mátrixa
n		a mátrixok sorainak, oszlopainak száma; sorszám
e_3, e_{45}, e_6	mm	mért lehajlások
s_i	mm	kötőelemek távolsága
e_i	mm	a betétfák megcsúszása
f	mm	súlyponttávolság
C_i	N, kN	csavarokra/betétfákra az elcsúszásból keletkező erő
${}_C C_1, \dots, {}_C C_6$		az $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ erőre vonatkozó differenciálegyenlet integrálási állandói
$a, a_1, d_1, d_3, C_1, C_2, C_3, C_i,$ $A_i, B_i, C_i, A, B, C,$		konstans együtthatók
$M_1, d_2, Q, \alpha, \rho, \Delta$		a 3.1.1. pont saját jelölései. Értelmezés ott!

1. BEVEZETÉS

1.1. A DISSZERTÁCIÓ CÉLJA

Tartószerkezetek létrehozása és a kívánt funkció szerinti működtetése a tervezés-kivitelezés-fenntartás feladatainak egységes szemléletét igényli ahhoz, hogy teherhordó szerkezeteinket egyre magasabb igényszinten (gazdaságos építés, korszerű fenntartás, a mindenkori állapot objektív ismerete) működtethessük.

A megépített tartószerkezetek tényleges viselkedésének egyre pontosabb leírása, ezen viselkedés tapasztalatainak visszacsatolása a tervezési ismeretek halmazába az elméleti, tervező, kivitelező és fenntartó mérnökök tudomásul vett feladata, amely egységes szemléletnek kialakításához/erősítéséhez szeretnék hozzájárulni.

Valamely szerkezet reakcióerőinek, belső erőinek és mozgásainak kiszámítása csak modell közbeiktatásával lehetséges. Egy modell elfogadása magában foglalja a közelítések szükségszerű tudomásulvételét is. Modellezzük a szerkezetet, a terhek elhelyezkedését és megoszlását, az építőanyagok tulajdonságait. Egyszerűsítjük a modelleket, hogy azok matematikailag minél pontosabban és egyszerűbben legyenek leírhatók. Ez az egyszerűsítés már nem feltétlenül eredményez olyan modellt, amelyet az analitikus geometria módszereivel leírva – és beillesztve azt az egyensúlyi követelmények rendszerébe – vizsgálunk. A fenti geometriai definíció továbbra is szükséges, azonban a számítógépek alkalmazásával nem kell szigorúan törekednünk a meghatározandó ismeretlen mennyiségek korlátozására, ill. a keresett statikai/dinamikai függvények analitikus megoldására! Valamint minden konkrét esetben ezek teljes szerkezetre vonatkozó összefoglaló leírására sem!¹

A véges elemekre bontás lehetősége, az elemek kapcsolatának megfogalmazása, a kívánt mennyiségek meghatározása a kapcsolódó pontokban, a számítási módszer kidolgozása nem jelent elméleti egyszerűsödést! Viszont eredményezi a pontosabb modellalkotást, az egyre kevesebb, vagy egyre pontosabb közelítést, a tartószerkezetek igénybevételeinek-feszültségeinek-mozgásainak a valóságot jobban megközelítő meghatározását! A felszabadult számítási lehetőségek felső határát az értelem, ill. a gyakorlat igénye szabja meg.

Feltételezzük, hogy a gyakorlati tapasztalatokkal alátámasztott, az elméletből következő azon tény, hogy a tartószerkezetek változása egyértelműen módosítja azok dinamikus viselkedését is, eszközéül válik a gyakorlat azon igényének, hogy a tartószerkezetek mindenkori állapotát a lehető legegyszerűbben, és mindenképpen roncsolásmentesen megismerhessük.

¹ Ezt megteszik a számítógépes software-ek.

A disszertáció részben vizsgálja ezen ezt a feltételezést, szem előtt tartva a lehetőséget, hogy az elméleti bizonyosság nem feltétlenül jelenti a gyakorlati megvalósíthatóságot, pl. azért, mert ez nehézkes vagy drága, vagy azért, mert az elérhető eredmény nincs arányban a befektetett munkával. A kis változások detektálása az építőiparban elérhetetlen (és szükségtelen) pontosságot kíván.

A tervező, kivitelező, fenntartó mérnökök mindennapos gyakorlatukban a műszaki mechanika általános törvényeit rutinszerűen alkalmazzák. Erőtani szempontból általában csak az időtől független folyamatokat vizsgálják a statika módszerével. Az időtől függő kinetikai folyamatokat nem, ill. kevésbé. Márpedig ezen jelenségek magukban hordozzák a statikus folyamatokat is, csak az időváltozót zérusnak kell tekintenünk! (Matematikusan fogalmazva: a statikus folyamatokat leíró függvények idő szerinti parciális deriváltja zérus.)

Az idő szerinti viselkedés ismeretében egy szerkezetről sokkal többet tudhatunk – ezen megismerés érdekében rögzítjük a dinamikai állapotot –, hiszen ezen állapot elemzése mind a statikai, mind a kinetikai folyamatok analizálására képessé teszi a vizsgálandót. A vizsgált dinamikai jellemzők - sajátalakok, sajátlengésszámok, csillapítás - önmagukban talán kevésbé adathordozók az építőmérnöki gyakorlat számára. Ezek változása azonban igen, különösen akkor, ha az információkat hordozó függvényeket a használatbavétel előtt is rögzítették.

A fenti előnyök kihasználása érdekében a múlt század hatvanas éveitől kezdődően világszerte voltak mérések (Magyarországon is), amelyeket a szerkezetek minél pontosabb megismerése érdekében végeztek, az eredményeket ezen cél érdekében dolgozták fel, és rendszerezték a dinamikus szerkezetvizsgálat elméleti alapjait.

A kilencvenes évek elején a globális dinamikai szerkezetvizsgálatok hazai bevezetése megtorpant. (Ez derült ki a Győrött rendezett - nem hivatalos – összejöveteleken, valamint a megbízásaink számának visszaeséséből.) A téma nem kapott egyetemi támogatást, megrendelőit sem. Hiába ismertettük a korábban felsorolt cikkek biztató megállapításait!

Elhatároztam, hogy laborkísérletekkel folytatom a munkát. Vasbeton tartók vizsgálataira gondoltam, hiszen ilyeneket már végeztünk is a Szerkezetvizsgáló Laboratóriumunkban. Az elvégzett kísérletek pedig szolgáljanak egy disszertáció alapjául! Miután Sopronban, az Erdészeti és Faipari Egyetemen² a témavázlat megismerése után azonnal fogadtak, mint Ph.D. hallgatót, az eredeti témámat aktualizáltam, azaz nem vasbetonszerkezetű, hanem faszerke-

² Most Nyugatmagyarországi Egyetem



zetű tartó vizsgálata mellett döntöttem. Tudtam, hogy a faszerkezetű tartók dinamikai vizsgálata (ill. az erre vonatkozó igény) jelentősen növekszik, valamint azt, hogy a fa-, acél- és vasbetontartók közül (ugyanazt a szerkezetet vizsgálva) a fatartók sajátfrekvenciái a legmagasabbak [Harnach, 1987] (Ugyanezen cikk ismerteti a faszerkezetek dinamikai sajátosságait is, elsősorban a csillapítás mértékét illetően.) Akkor nyilván az egy adott szerkezeti változás előidézte dinamikai változás egy fatartóban karakterisztikusabb, mint egy acél, vagy egy vasbeton tartóban!

A disszertációban végigkövetem a laboratóriumi körülmények között elvégzett adatrögzítés – identifikálás – diagnosztika folyamatát, amelynek során a dinamikai állapot változásából a gyakorlat számára is használható következtetések vonhatók le.

1.2. A TARTÓ LABORATÓRIUMI MÉRÉSEI

Megterveztem egy kísérleti fatartót, amelynek szerkezeti tulajdonságai változtathatók. (A tervet a **Kísérleti jegyzőkönyv**-hez csatoltam). A legcélszerűbbnek az tűnt, hogy az egyes tartók az előzőekből, bizonyos szerkezeti elemek elhagyásával hozhatók létre rövid idő alatt. A felállított tartó fokozatos szétszedésével tehát több tartószerkezet is kialakítható, így a változások hatását többfajta tartószerkezeten is mérhetjük. (A tartószerkezet gyártásánál különleges igényünk nem volt, úgy készült fűrészelt gerendákból, mint egy helyszínen ácsolt faszerkezet. Pl. állványszerkezet, tetőszerkezet, vagy éppenséggel egy fahíd.)

A tartók statikai jellege

- Térben is kitámasztott kétszeres feszítőmű.
- Síkbeli kettős feszítőmű. (Mint , de a térbeli ferde kitámasztások nélkül.)
- f Síkbeli egyszeres feszítőmű. (Mint , de csak egyik síkbeli ferde kitámasztással.)
- f Kéttámaszú gerenda.

A tartók elméleti dinamikai jellege

A tartók szakaszonként folytonos tömegeloszlásúak, inerciájuk a tengelyük mentén nem állandó. Viselkedésük várhatóan lineáris, csillapításuk elhanyagolható.

Változtatható a

- a kétfás gerenda elemeinek egymáson való elcsúszása, és az elcsúszás mértéke. (Ez utánozza a valóságot, mert idővel a kapcsolt rudak egymáson való elcsúszása növekszik a tartószerkezetekben, és annak nagysága általában ismeretlen.);
- a felső gerendát egy rugalmas csukló szakítja meg, így a felső gerenda illesztésében a terhelés hatására kialakul egy relatív elfordulás. Az illesztést modellezzük rugalmas csuklóként, amelynek az elfordulással szembeni ellenállása rad/kNm.

1.3. IRODALMI ÁTTEKINTÉS

1.3.1. Összetett keresztmetszetű fatartók számítása

A vizsgált tartószerkezet gerendája kétfás tartó. A két, elvileg azonos keresztmetszetű fa egymáson elcsúszik, ezáltal a kétfás gerenda hajlítási merevsége változik. A mért lehajlási értékeket pontosan kell számítással követnünk, emiatt a szabályzatokban megadott, a hajlítási merevséget csökkentő tényezővel való számítás esetünkben nem igazán elegendő. –Hogyan, és mennyire befolyásolja az elcsúszás mértéke a lehajlásokat?

1) [HEILIG, R. 1953a és HEILIG, R. 1953b]

A cikkben a beton-acél öszvértartó fenti kérdésnek megfelelő vizsgálatáról olvashatunk. (A tartók anyaga az elméleti vizsgálat szempontjából közömbös, mivel a megállapításoknak nincsenek anyagtól függő specifikumai. Az egyes anyagokat az anyagjellemzőik kielégítően képviselik.) – A kéttámaszú vízszintes tartón tett megállapítások:

⇒ **merev kapcsolat** – igaz a Bernoulli-Navier hipotézis: – esetén a km. két része között nincs elcsúszás, a **nyírási alakváltozás nem elhanyagolható**;

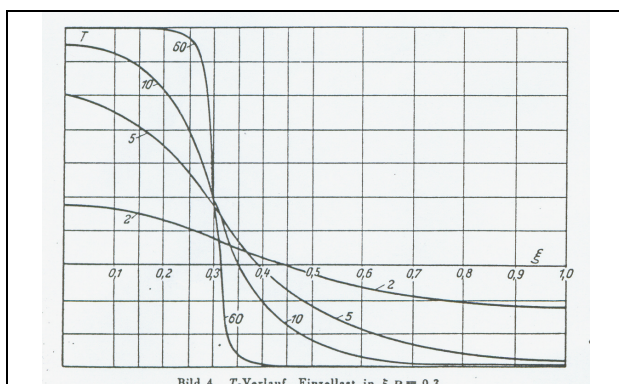
⇒ **rugalmas kapcsolat** – az elemek egymáson elcsúsznak, a vízszintes csúsztatóerő egyenesen arányos az elcsúszással – esetén a lehajlásokat (w) egy hatodrendű homogén differenciálegyenlet írja le:

$$w^{VI} - I^2 \cdot w^{IV} = 0$$

A I számot a cikk ágyazási jellemzőnek (Bettungskennwert) hívja, amely az egyes km.-i részek megnyúlási és hajlítási merevségétől (B_1, B_2, D_1, D_2), ezek arányától (v, ε, D_0) és összegétől (B), a km. inerciasugarától (i), a tartó támaszközének négyzetétől (l^2), az elcsúszás és a vízszintes csúsztatóerő arányától (k), a két km.-i rész súlypontjának távolságától (e), valamint a teher jellegétől és elhelyezkedésétől függ. **A nyírási alakváltozások a $I \leq 10$ értékig elhanyagolhatók.**

A cikk rámutat arra is, hogy az öszvérkétszámú súlypontja nem a km. egyértelmű geometriai tulajdonsága (az anyag eloszlása a tartó tengelye és a km. mentén konstans), hanem függ az alakváltozástól. Megadja azonban a $I = 2, 5, 10, 60$ értékekre a tartó támaszközének tizedeiben az igénybevételek elcsúszás nagyságától is függő változását: terheljük koncentrált erővel egy kéttámaszú tartó $x/l = x = 0,3$ helyen lévő km.-ét! Figyeljük meg pl. a vízszintes csúsztatóerő változását a tartó tengelye mentén a I különböző értékeit feltételezve. A lenti ábrából azt a tendenciát állapíthatjuk meg, hogy minél nagyobb a I értéke, a vízszintes csúsztatóerő annál inkább követi a nyíróerőábra vonalát. Ha $I < 5$, akkor az előbbiekhöz képest a vízszintes csúsztatóerő lényegesen lecsökken, nem követi a nyíróerőábra ugrását. Ha k a tartó tengelye mentén konstans, akkor az elcsúszási ábra is ehhez hasonló.

A tartó tengelye mentén az elcsúszásokat leíró függvénnyel azonosan változó hajlítási merevséggel határozhatók meg a tartó tényleges lehajlásai.



$$\lambda = \kappa \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \frac{i^2}{l^2} + \frac{e^2}{l^2}}$$

(v.ö.: [PISCHL, R. 1968])

$$\kappa^2 = \frac{k \cdot I^4}{B_2}$$

[Heilig, R. 1953a]

1) [CHOLNOKY Tibor, 1966]

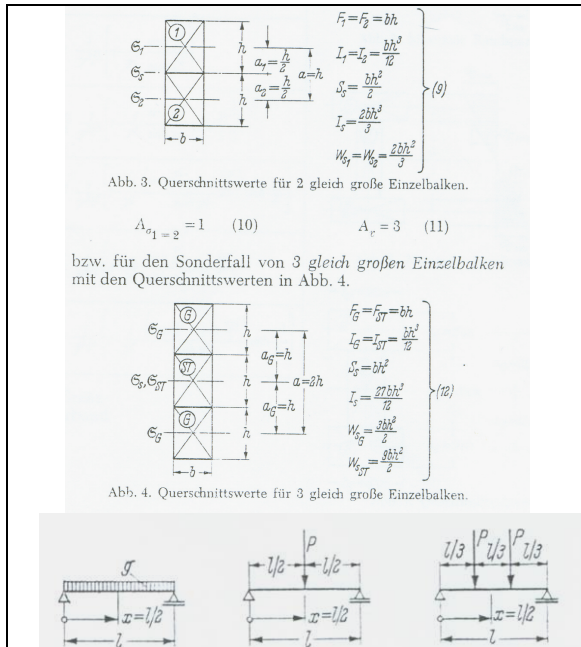
Az építési Mechanika teljes tárgykörét magában foglaló egyetemi tankönyv minden gyakorlatban előforduló problémával foglalkozik legalább a megemlítés szintjén.

1) [PISCHL, R. 1968], [PISCHL, R. 1969a], [PISCHL, R. 1969b]

A szerző többfás hajlított fatartókat vizsgál, az egyes tartók közötti diszkrét (dűbel, csavar, szeg, stb.) kapcsolat rugalmas, tehát az egyes fák egymáson elcsúsznak.

A feszültségeket és a lehajlásokat módosító tényezőket a szabályzatok elsősorban kísérletekkel alapították meg, írja a cikk, de ezen tényezők az öszvértartók rugalmas elméletével is levezethetők. A szerző statikailag határozott kéttámaszú, két- és háromfás keresztmetszetű síkbeli tartókon vizsgálódik. Meghatározza ezek feszültségekre és a lehajlásra vonatkozó módosító tényezőit a merev (egymáson nem elcsúszó) keresztmetszetű tartókhöz képest. Kimutatja, hogy ezen tényezők a teher jellegétől (és a keresztmetszet helyétől), az ágyazási tényezőtől, a tartó támaszközétől és a keresztmetszeti méretektől függenek. – A fenti cikkek az igénybevételekre vonatkozó (N normálerő és M hajlítónyomaték) másodrendű homogén differenciálegyenlet megoldásával jutnak eredményre:

$$\frac{d^2 N(x)}{dx^2} - g^2 \cdot N(x) + a \cdot M(x) = 0$$



Az a és g^3 számok a rugóállandótól, a rugalmasági modulustól és a keresztmetszetek jellemzőitől függenek. A cikkben a lenti ábrán lévő keresztmetszetekre és terhelésekre a gyakorlat szempontjából azonnal használható tényezők találhatóak olyan tartókra, amelyek hajlítási merevsége állandó, és a $0 \leq g \leq 50$.

[PISCHL, R. 1969a]

A szerző összehasonlító számításokat végez: ugyanazon tartón meghatározza a feszültségeket módosító h_s , és a lehajlásokat módosító h_r tényezőt, valamint segítségével feszültségeket és lehajlásokat számít az elmélet, és az új (1969!) DIN 1052 alapján. A DIN szerint számított feszültségek és lehajlások az elméletileg levezetett értékeknél kisebbek [PISCHL, R. 1969b]:

Lastfall g	Lastfall P in Feldmitte		
	Nach der Arbeit des Verfassers	Nach dem neuen DIN-Vorschlag	Unterschied in %
$\sigma_{G \max}$	93,0 kg/cm ²	94,5 kg/cm ²	1,6 %
$\sigma_{ST \max}$	78,9 kg/cm ²	83,4 kg/cm ²	5,7 %
v_{\max}	2,07 cm	2,08 cm	0,5 %
	Nach der Arbeit des Verfassers	Nach dem neuen DIN-Vorschlag	Unterschied in %
$\sigma_{G \max}$	108,2 kg/cm ²	94,5 kg/cm ²	14,5 %
$\sigma_{ST \max}$	124,6 kg/cm ²	83,4 kg/cm ²	49,4 %
v_{\max}	1,71 cm	1,67 cm	2,4 %

³ V.ö.: [Heilig, R. 1953a] A l^2 és a g^2 elcsúszási jellemzők nem egyenlők. Ugyanis $g [=] 1/\text{mm}$, de l dimenzió nélküli szám. $\rightarrow g \cdot l = 1$.

1) [RÓNAI Ferenc - SOMFALVI György, 1982]

A tervezés és méretezés előírásait tartalmazza a gyakorló mérnökök számára írt könyv a kétfás és többfás keresztmetszetek jellemzőinek meghatározása során is. Csökkentő tényezőket alkalmaz, amelyekkel nagyon egyszerűen meghatározható a lehajlás szempontjából számításba vehető inercia. Csökkenti ezt csak a kapcsolat jellegétől függő mértékben. A rugalmassági modult is csökkenti a lassú alakváltozás függvényében.

Hajlított tömörkeresztmetszetű tartóknál a nyírási alakváltozást akkor kell figyelembe venni, ha a támaszköz és a km. magasságának aránya tíznél kisebb.

Ezen egyszerűség valószínűleg túlméretezett tartókat eredményez, amennyiben a keresztmetszetek méreteinek meghatározásánál a lehajlás a mértékadó.⁴

A disszertáció számára ezen egyszerű megoldás valószínűleg nem ad eléggé pontos eredményt.

1) [MÖHLER, K. 1986]

A cikk a faszervezeteknél alkalmazott különböző kapcsolóelemekhez felsorolja az összekapcsolt fák közötti elcsúszás lehetséges értékeit egy, a DIN 1052 szerintinél pontosabb lehajlásszámítás elvégezhetősége érdekében. – A terhelés mind az összekapcsolt fák, mind a kapcsolóelemek szempontjából a megengedhető legnagyobb, az eltolódás és a normálerő egymástól lineárisan függenek. Definiálja a *C* csúszási modult (Verschiebungsmodul) is, amely szám a megengedett normálerő, és a megengedett eltolódás hányadosa. A lineáris kapcsolat miatt a számított eltolódás és a számított erő hányadosa is *C*.

Felhívja a figyelmet arra, hogy a korábinál pontosabban felül kellene vizsgálni a lehajlási határértékeket, figyelembe véve a fa lassú alakváltozását, jóllehet ezen határértékeket évtizedek óta negatív tapasztalatok nélkül alkalmazzák. Lehetséges, hogy ezen értékek túlzottak, így a további gazdaságtalan (felül méretezett) tervezést el lehetne kerülni. Ezek felülvizsgálatához sok kísérletet kellene még elvégezni.

1) [DIN 1052 Teil I, 1988]

PISCHL kritizálta a korábbi, 1969-es német szabványt, amely a több részből álló keresztmetszetek feszültségeket és a lehajlást módosító tényezői nem veszik figyelembe. Ezen számok függnék a terhelés jellegétől is. (Az alábbi táblázat szerint a lehajlásban jelentkező 0,5-2,4 % hiba – a tervezés és ellenőrzés szempontjából jelentéktelen –, növelheti némiképp a km.-i méreteket, így a biztonság javára téved.)

Az 1988. évi DIN sem foglalkozik a teher jellegének hatásával, amikor a többfás tartók lehajlásainak számítását ismerteti. A német szabvány bevezeti a hatékony felületi másodrendű nyomaték fogalmát, amely az egyes felületi részek hatékony inerciájának összege. A korábban felsorolt geometriai és anyagjellemzőktől függ, de Heilig I száma, Pischl a és g értékei helyett alkalmazott *C* csúszási modulus értékét – mivel ez szabvány és nem tudományos cikk – meg is határozza. Nyilvánvalóan a tervezéshez és az ellenőrzéshez elegendő pontossággal, és csak azon esetekre, amikor egy kapcsolatban található összes elem a szabvány szerinti maximális mértékig ki van használva. (Ábra) A DIN a fa őszvérkeresztmetszetek öt alaptípusát ismerteti.

A disszertációm alapjául szolgáló elvégzett kísérletek során sem a gerendák, sem az átmenő csavarok nem voltak teljesen kihasználva. A DIN –ből kimásolt ábra szerinti táblázat (köv. oldal) értékei a fokozatos közelítéssel kiszámítandó anyagjellemzők meghatározása során a kapcsolatok jellemzésére kiinduló értéknek megfelelők.

⁴ MSZ 15025:1989 (ill.1986) Építmények teherhordó faszervezeteinek erőtani tervezése
Magyar Szabványügyi Hivatal

Tabelle 8: Querschnittstypen und Rechenwerte für Verschiebungsmoduln C in N/mm

Für Biegung bzw. Knickung maßgebende Schwerachse	Verbindungs-mittel	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Typ 5
y - y	Nagel (durch eine Fuge)	600	600	900	600	600
	Nagel (durch zwei Fugen)	700	700	900 je Fuge	-	700
z - z	Nagel (durch eine Fuge)	-	900	600	-	-
	Nagel (durch zwei Fugen)	-	900 je Fuge	700	-	-
y - y und z - z	Dübel nach DIN 1052 Teil 2	15 000 für zulässige Belastung ¹⁾ bis 16 kN				
		22 500 für zulässige Belastung ¹⁾ über 16 bis 30 kN				
		30 000 für zulässige Belastung ¹⁾ über 30 kN				
y - y und z - z	Stabdübel, Paßbolzen	0,7 · zul N je Fuge mit zul N = zulässige Belastung in N je Anschlußfuge ²⁾				

¹⁾ Als zulässige Belastung sind die Werte je Dübel für den Lastfall H (siehe DIN 1052 Teil 2, Tabellen 4, 6 und 7) maßgebend.
²⁾ Für Laubholz, Holzartgruppe C: 1,0 · zul N.

[DIN 1052 TEIL I, 1988]

1) [KNEINDL, R. 1990]

A cikk kétnyílású folytatólagos tartót vizsgál állandó, de tetszőleges számú részből álló keresztmetszettel, amelynek nyílásonként változhat a C elcsúszási modulusa. (A vizsgált esetben pl. úgy, hogy az egyes km.-i részek közötti kapcsolat a tartó tengelye mentén mindkét 4 m-es nyílásban állandó, ill. csak a támaszok környékén van 60-120-60 cm hosszban kapcsolat.) A keresztmetszetek egyes részeire külön-külön érvényesnek tekinti a Bernoulli-Navier hipotézist, de a teljes keresztmetszetre nem. A megoldás egy nem feltétlenül állandó együtthatójú, a mozgásokra és az igénybevételekre vonatkozó elsörendű differenciálegyenlet-rendszer, amely elhanyagolja az elcsúszásoknak az igénybevételekre gyakorolt hatását.

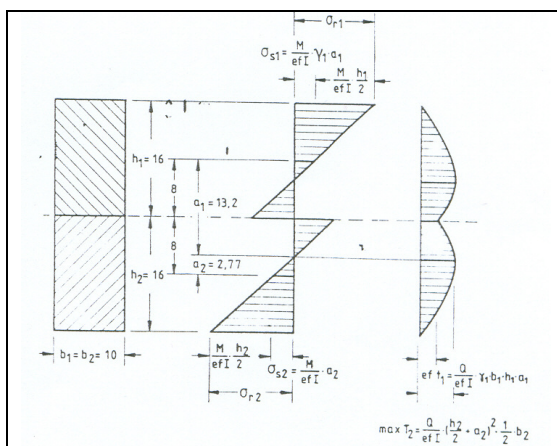


Bild 11. Spannungsverteilung im Querschnitt nach DIN 1052

$A_1=A_2=160 \text{ cm}^2$; $I_1=I_2=3,41 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$
 $h_1=h_2=16 \text{ cm}$; $E_1=E_2=10000 \text{ MN/m}^2$
 $c_{1||}=40,9 \text{ MN/m}^2$, $c_{1\perp}=188 \text{ MN/m}^2$
 $(E_{\perp}=300 \text{ MN/m}^2)$, $G_1=G_2=500 \text{ MN/m}^2$

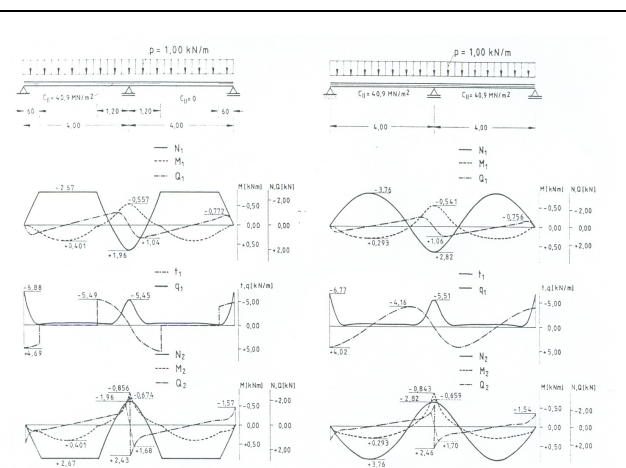


Bild 9. Schnittgrößen bei nicht kontinuierlichem Verbund für Gleichlast über beide Felder

Bild 10. Schnittgrößen bei kontinuierlichem Verbund für Gleichlast über beide Felder

[KNEINDL, R. 1990]

Az differenciálegyenlet-rendszert a szerző numerikus iterációval oldja meg számítógép segítségével. A fenti ábra tartalmazza a jelöléseket, a tartó keresztmetszetét, és a feszültségeket. Továbbá a két keresztmetszeti rész igénybevételeinek, a t csúsztatóerőnek és az egyes részek különböző lehajlásaiból eredő q keresztirányú erőnek a változását mutatja, folytatólagos (a tartó teljes hosszán beépített) és nem folytatólagos (csak a támaszok környékén elhelyezett) kapcsolat esetén.

Ezen cikkből is kitűnik, hogy a lényeges a teher jellege és elhelyezkedése.

1) **[DABAON, M.-TSCHEMMERNEGG, F.-HASSAN, K. A. - LATEEF, T., 1993]**

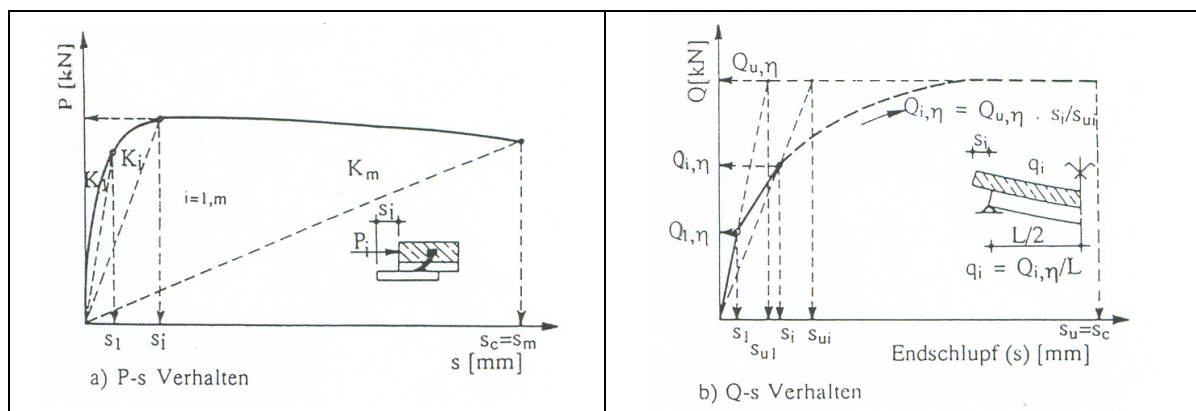
A cikk beton-acél öszvérkeresztmetszetű kéttámaszú tartót vizsgál. A keresztmetszeti részek közötti fuga (Verbundfuge) nemlineáris viselkedésű. A kérdés az, hogy az elcsúszás függvényében hogyan változnak az igénybevételek és a lehajlások? A paraméterek: a támaszköz, az h kapcsolati fok (h Verdübelungsgrad: az l támaszközön elhelyezett n db kapcsolati elem határerejének és az acéltartó plasztikus határerejének hányadosa. Ha $h = 1$, akkor a két erő azonos, a méretezés jó, ha $h = 0$, nincs kapcsolat.) Az elcsúszás a lehajlástól, a keresztmetszeti- és anyagjellemzőktől függ, másodrendű inhomogén differenciálegyenlet írja le. A szerzők a tartó és a fuga plasztikus határigénybevételeit iterációval határozzák meg. A feltett kérdés, hogy a kapcsolóelemek számát meddig szabad csökkenteni a plasztikus teherbírás kihasználásával úgy, hogy az öszvérkeresztmetszetű tartó ne veszítse el a duktilitását? Minél kisebb az h , annál nagyobb a tartó egyes részeinek elcsúszása, és ezt különösen nagy támaszközöknél korlátozni kell – A cikkben hivatkozott, a szerzők által készített szoftver minden egyes paraméter mérlegelését lehetővé teszi. (Ábra)

A cikk a faszerkezetek szempontjából amiatt érdekes, hogy felveti pl.:

- szabad-e, és ha igen, mennyire milyen mértékben szabad az acélszerkezetű kapcsolóelemek plasztikus teherbírását kihasználni (méretek, szerkesztési szabályok, palástnyomás, stb.);
- mekkora max. elcsúszás engedhető meg teherbírasi és alakváltozási szempontból;
- mekkora az elcsúszásból és a nyírasi alakváltozásból meghatározható lehajlások, igénybevételek viszonya.makkora viszony nincs,ellenben van . milyen viszony,vagy: mekkora az....igénybevételek mértéke

A számítás az alábbi iterációs lépéseket követi:

- ⇒ minden egyes K_i dübelmerektséghez meghatározható egy s_i elcsúszás a cikkben leírt módszer szerint;
- ⇒ adott h - hoz és K_i merevséghez meghatározzuk a plasztikus teherbírást ($Q_{u,h}$) úgy, hogy a kapcsolatok mindegyikét azonos merevségűnek tételezzük fel;
- ⇒ ezen teherbíráshoz kiszámítjuk a maximális elcsúszást (s_i);
- ⇒ csökkentjük a dübelmerektséget mindaddig, amíg a hajlékony kapcsolatú tartó el nem éri a $Q_{u,h}$ teherbírást.



[DABAON, M.-TSCHEMMERNEGG, F.-HASSAN, K. A. -LATEEF, T., 1993]

1) [MSZ ENV 1995-1-1:2000] és [NAD MSZ ENV 1995-1-1: 2002]

Az **EUROCODE 5** szerint az összetett keresztmetszetű hajlított tartók lehajlását végső soron ugyanúgy kell meghatározni (ábra), mint ahogy azt a **DIN 1052** is előírja.

B2. A hatásos hajlítási merevség

(1) A hatásos hajlítási merevséget a következők szerint kell számítani:

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^3 (E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2)$$

az E átlagértékeivel, és ahol

$$A_i = b_i h_i,$$

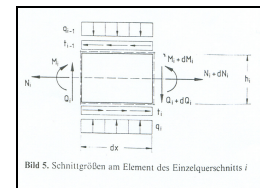
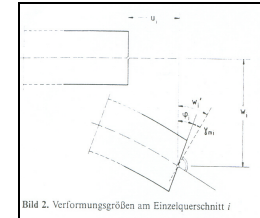
$$I_i = b_i h_i^3 / 12,$$

$$\gamma_2 = 1,$$

$$\gamma_1 = \left[1 + \pi^2 E_i A_i s_i / (K_i l^2) \right]^{-1}, \text{ ahol } i = 1 \text{ és } i = 3$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 (h_1 + h_2) - \gamma_3 E_3 A_3 (h_2 + h_3)}{2 \sum_{i=1}^3 \gamma_i E_i A_i}$$

T alakú keresztmetszet esetén a $h_3 = 0$.



(2) A kapcsolatokban a csúszás hatását figyelembe kell venni akár a csúszási tényezővel, akár e előírt elcsúszási értékkel, amely a kapcsolat valóságos feszültségintjével összhangban van.

(3) A használhatósági határállapothoz tartozó K_{ser} pillanatnyi csúszási tényezőt vagy az előírt u elcsúszási értéket az EN 26891 szerint, a k ($= K_{ser}$) meghatározására előírt vizsgálatokkal kell meghatározni.

(4) A teherbírási határállapot K_u pillanatnyi csúszási tényezője a következő:

$$K_u = 2K_{ser} / 3 \quad (D2.a)$$

(5) A $K_{u,fin}$ végső csúszási tényező a következő:

$$K_{u,fin} = K_u / (1 + k_{def}) \quad (D2.b)$$

(6) A teherbírási határállapot u_u előírt elcsúszási értéke a következő:

$$u_u = 2,0 u_{ser} \quad (D2.c)$$

(7) Az előírt végső elcsúszás:

$$u_{u,fin} = u_u (1 + k_{def}) \quad (D2.d)$$

A csúszási tényezőket egy másik szabványból kell vennünk, de az alkalmazásuk módját tartalmazza az [MSZ ENV 1995-1-1:2000] szabvány is.

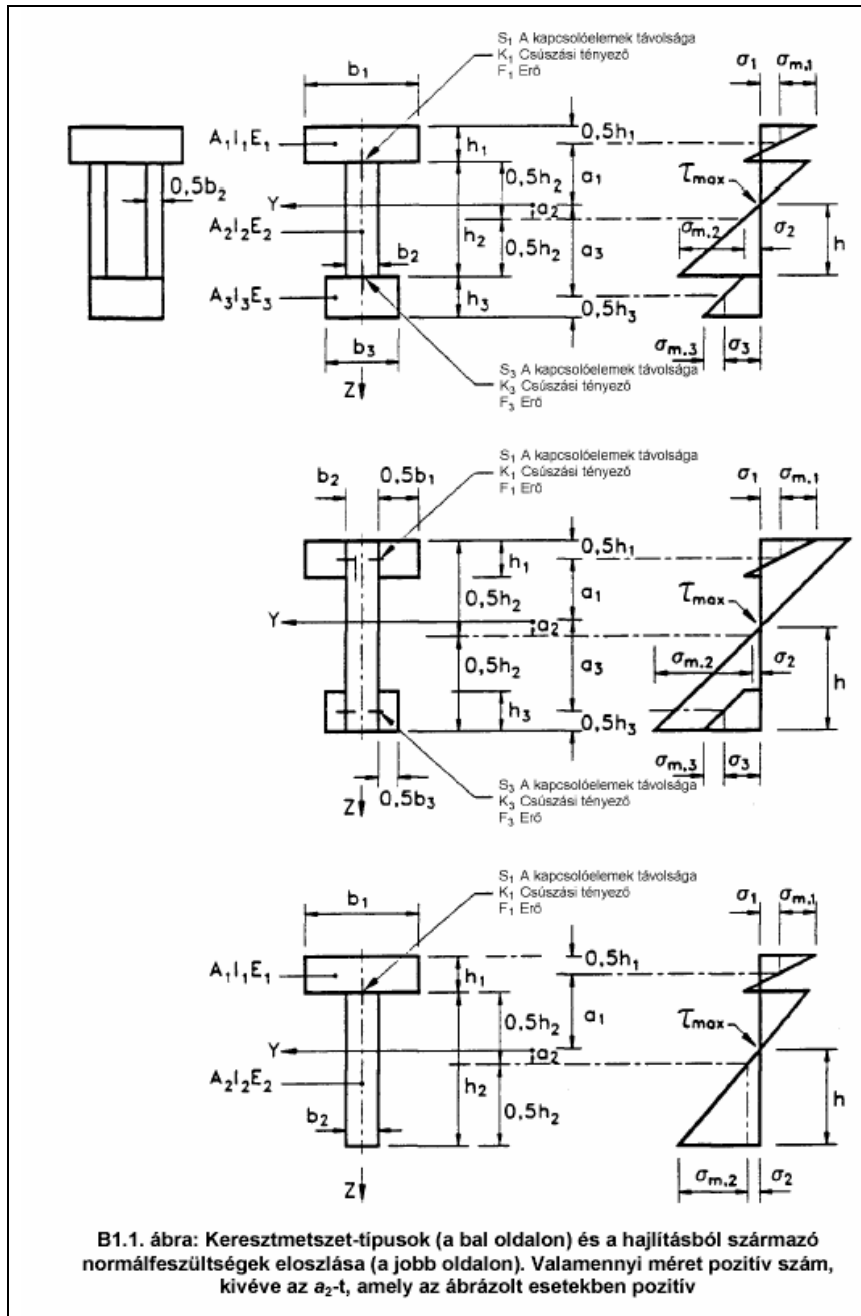
[MSZ ENV 1995-1-1:2000]

Az **EUROCODE 5** gyakorlatilag ugyanazon keresztmetszeti alaptípusokat ismeri (ábra a következő oldalon) mint a **DIN**.

A **Nemzeti Alkalmazási Dokumentum** a lehajlások meghatározásával kapcsolatos megjegyzést/értelmezést nem tartalmazza. Az igény szintnek megfelelően meghatározza az egyes tartótípusok határlehajlásait.

A kísérletek során alkalmazott fa anyagjellemzőit a mért és a számított lehajlások egyenlősége alapján határozom meg. A nem konstans keresztmetszetű és hajlítási merevségű kétfás tartó lehajlásainak elméletileg helyes felírása a továbbiak szempontjából nagyon lényeges mind a dinamikai jellemzők megítélésében, mind a tartó identitásvizsgálata szempontjából.

(A laboratóriumi mérésekhez készített tartó összeállítása, az összeállítás ellenőrzése, az első mérési eredmények értékelése során nem figyeltem eléggé arra, hogy az eredmények feldolgozása során később minél kevesebb nehezen érkelhető eredménnyel találkozom. A legnagyobb hiba az volt, hogy nem mértem az egyes keresztmetszeti részeket az egyes állapotokban más-más erővel összehúzó átmenő csavarokban az erőt, valamint a felső gerenda közbenső toldásának keresztmetszetében a relatív elfordulást. Pedig geometriailag meghatározott helyeken elhelyezett nyúlásmérő bélyegekkel milyen egyszerű lett volna!



[MSZ ENV
1995-1-1:2000]

1.3.2. Szerkezetek dinamikai viselkedése

A tartószerkezetek dinamikájának, a dinamikai viselkedésnek, a dinamikai jellemzők meghatározásának, nagyon bőséges szakirodalmi van. Mivel a dinamikai viselkedés változásának a tartószerkezet meghatározása szempontjából alapvető jelentőségre van, ezért ezen mérnök-dinamikai alaplakok – a sok közül néhányat kiragadva – legfőbb megállapításait nagy vonalakban ismertetni kell.

1) [TIMOSHENKO, S.–YOUNG, D. H. 1955, 3rd Edition]

Az 1928. évi első kiadás előszavában Timoshenko azt írja, hogy a mérnöki rezgés tan általános alapjait akarja ismertetni. A könyv – mely a rezgéseket teljes klasszikus matematikájukkal, elsősorban építőmérnöki, de gépészeti példákkal is magyarázva ismerteti a hajlító és csavaró saját- és gerjesztett rezgéseket csillapítás nélküli és különböző (viszkózus, Coulomb-féle, stb.) csillapítás esetén. az alábbi fejezetekre tagozódik (levezetések részben a Lagrange-féle egyenletekre, részben a d'Alembert-elvre épülnek):

- ▷ egyszabadságfokú rendszerek harmonikus rezgései;
- ▷ nemlineáris rezgések. Rezgések változó merevség esetén;
- ▷ két- és többszabadságfokú rendszerek;
- ▷ rugalmas szerkezetek rezgései: prizmatikus rudakból álló egy- és többnyílású tartók rezgései, membránok, lemezek, körgyűrű, körlemez, stb

A könyv 75 évvel ezelőtt megfogalmazta a gyakorlatban előforduló síkbeli tartószerkezetek rezgésjellemzőinek meghatározását. – Azt írja, hogy a könyvet minimális dinamikai ismerettel is lehet tanulmányozni. Ez nem egészen így van! Tény, hogy kevesebb dinamikai ismeret kell a könyv használatához, mint matematikai.

Az utolsó fejezeten belül írnak a szerzők a hidak – elsősorban a vasúti hidak – a rezgéséről is. A csillapításról, a dinamikus tényezőről, a mozgó tömegek hatásairól.

A könyv számos szakirodalmi hivatkozása az akkori ismeretek összefoglalásáról tanúskodik. – A dinamikai jellemzők időbeni változásáról nem olvashatunk benne.

Haviár Győző okl. mérnök, **Muttnyánszky Ádám** okl. gépészmérnök, **Pattantyús Ábrahám Géza** okl. gépészmérnök az 1940-es években már foglalkoztak Magyarországon is a rezgésekkel mérnöki, de elsősorban gépészmérnöki szempontból. – **Kézdi Árdád** okl. mérnök az ötvenes években talajmechanikai szempontból vizsgálta a rezgések hatásait.

1) [KOLLÁR Lajos – MAJOR Sándor – KIRÁLY Béla, 1959]

Az első Mérnöki Kézikönyv (**szerkesztő PALOTÁS LÁSZLÓ**) egyik fejezete a mérnöki rezgéstannal foglalkozik. A fejezet rövid elméleti összefoglalót, az egy- és többszabadságfokú rendszerek önrezgés-számának meghatározását tartalmazza. Az épületekre ható rezgések okaként a gépeket, a közlekedést és a szélterhet sorolja fel. A rezgésszámítások céljaként a rezonancia elkerülését fogalmazza meg.

A dinamikus erőhatásból keletkező igénybevételek figyelembevételéhez a dinamikus tényezőt (m) ajánlja és határozza meg. A közúti hidakra vonatkozó m érték azonos a manapság is használatossal. A fejezetben a szerzők megjegyzik, hogy sok országban lengéstanilag helyesen a m szorzót egyéb (pl. az állandó és a mozgó teher aránya, a vonat/gépkocsi sebessége, a tartószerkezet sajátlengésszáma) tényezők értékétől is függővé teszik. *A kérdés még egyáltalán nem lezárt, hiszen a dinamikus tényező nemcsak biztonsági, hanem gazdasági kérdés is* olvashatjuk az 1959-ben megjelent könyvben. – A dinamikai jellemzők változásának figyelését akkor még nem vetették fel.

1) [BOSZNAVY Ádám, 1962]

A rezgésekkel kapcsolatos magyar szakirodalom legátfogóbb műve, amelyben a mérnöki gyakorlatban előforduló minden kérdésünkre választ kapunk. A könyv példáit kizárólagosan a gépészmérnöki gyakorlatból vette.

Háromfajta modell felvételével és teljeskörű matematikai megoldásával foglalkozik:

- ⇒ egyszabadságfokú modellek;
- ⇒ véges sok szabadságfokú modellek;
- ⇒ kontinuum modellek.

Felhívja a figyelmet egy-egy modell alkalmazhatóságára, a jól választott modell kritériumaira, mérés-technikai szempontokra. – Az első két esetben a klasszikus matematikát alkalmazza a rezgés-egyenlet megoldására. Minden egyes mennyiséget nagyon pontosan definiál, egyértelművé tesz, pontosan megold és interpretál. A mátrixelmélet rövid ismertetése után a véges sok szabadságfokú modellek mozgásegyenletét a lineáris algebra segítségével tárgyalja.

1) [SZABÓ János – ROLLER Béla, 1971]

A rúdszerkezetek elméletének mátrixos megfogalmazása esetén a dinamikai vizsgálatokhoz is készen állnak, vagy gyorsan előállíthatók a rendszer tulajdonságait összefoglaló mátrixok. (Tömegmátrix, hajlékonysági ill. merevségi mátrix, geometriai mátrix. Egyedül a csillapítási mátrix előállítása új.)

A rezgések d'Alembert-elv szerinti tárgyalása szinte következik a mátrixos megfogalmazásból, és szinte tiszta matematikai problémának tűnik a csillapítatlan szabad rezgések, a lineárisan csillapított szabad rezgések, a gerjesztett és csillapítatlan rezgések valamint a gerjesztett és csillapított rezgések tárgyalása. – A könyv felveti a fenti problémákat, rámutat a megoldás lehetőségére, de teljes egészében nem tárgyalja a rezgésproblémákat.

A könyv negyedét elfoglaló mátrixszámítási alapismeretek és a rúdszerkezetek széles körére érvényes számítási eljárások mátrixos interpretációja lehetővé teszi, hogy a könyv alapján a rúdszerkezetek dinamikai egyenleteit is megoldjuk.

1) [SZMODITS Kázmér, 1972]

A könyv hagyományos matematikai módszerekkel tárgyalja a síkbeli keretek statikai, dinamikai és stabilitási tulajdonságait. A szerző azzal indokolja – az általa divatosnak nevezett – mátrixanalízis mellőzését, hogy módszerének – a teheről független, csak a geometriától függő u.n. fix pontok megszerkesztésére vonatkozó fixpont-eljárás, amely az erőmódszert és a mozgásmódszert egyesíti – alkalmazásához nem szükséges matematikai előtanulmány.

Számítási példákkal illusztrálva vizsgálja az egy- és többszabadságfokú rezgő rendszerek dinamikus terhelésre létrejövő mozgásait és igénybevételeit, és az önrezgésszámok meghatározását. Bizonyos paraméterek meghatározásához táblázatokat is mellékel.

1) [LYON, Richard H. 1975]

A Statistical Energy Analysis (SEA) energiamódszerrel vizsgálja a rezgő rendszerek egyensúlyát. A SEA az 1960-as években alakult ki. Elsősorban olyan kapcsolt rendszerek vizsgálatára alkalmas, amelyeknél a csillapítás figyelembevétele elengedhetetlen. – Természetesen az összes korábban felsorolt modell vizsgálható vele.

1) [VÉRTES György, 1976]⁵

A könyv felsorolja az építményekre ható dinamikus terheket és hatásokat, ismerteti az építőanyagok tulajdonságait dinamikus terhelés esetén, a hagyományos matematikát és a lineáris algebra módszereit is alkalmazva végigvezeti az olvasót a rezgéstani számítások elméletén, érintve az energiamódszert is.

Az utolsó fejezet építmények dinamikus vizsgálatával foglalkozik: magasházak önrezgésszámának meghatározása, aerodinamikai vizsgálatok, kihorgonyozott tornyok rezgései, hajlított tartók vizsgálata lökészerű terhekre.

Röviden ismerteti az általa nagy jövő előtt álló módszernek nevezett rezgésvizsgálatokat, valamint a rezgésvizsgálatok alkalmazásának lehetőségeit:

- ⇒ a szerkezet számított és a valóságnak megfelelő merevségének kérdése. *Azaz: a felvett modell helyességének eldöntése a mért és számított statikus vagy dinamikus adatok egyeztetésével;*
- ⇒ a rezgéstani alapon nyugvó számításos-mérési vizsgálat. Az önrezgésszám számításával és mérésével, ezek összehasonlításával – kellő adat birtokában – eldönthető, hogy miként változott a szerkezet modellje, és ebből a tényleges változásokra is következtetni lehet. *Természetesen csak előzőleg identifikált modell esetén;*
- ⇒ az állandó önrezgésszám mérés. *Ez a tartó öregedésére, a természetes romlásra szolgáltat adatokat.*

1) [KORENEV, B.G.-RABINOVIE, I.M. 1980]

A könyv első kiadása 1972-ben jelent meg oroszul. A szerzők az előszóban leírják, hogy a sok más

⁵ L. még: **Vétes György**: Natural frequency of the horizontal vibrations of multi-story buildings with bearing walls *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 68, 1970, pp. 363-382

Kollár Lajos: Hidak és magasházak belebegési problémái *Építés- és Építészettudomány IX. kötet, 1978, 2-3. pp.121-153*

helyen megtalálható mechanikai és matematikai levezetések nem közlik, inkább kézikönyv szerűen akarnak segítséget nyújtani minél több tervezési problémához. Ennek megfelelően sokkal több, a gyakorlatban előforduló esetet tárgyal, mint a korábban felsorolt, általánosnak nevezett könyvek.

A könyvben levő számítási lehetőségek kritériumait minden esetben aprólékosan közli.

Az alábbi problémák esetén kaphatunk közvetlen hatékony segítséget a műből:

- ⇒ a megengedhető rezgések frekvenciái (*az 1972-ben érvényes szovjet előírások szerint*);
- ⇒ a gépek által előidézett dinamikus terhek meghatározása;
- ⇒ a dinamikus terhelést építőanyagok és építési szerkezetek dinamikai tulajdonságai (dinamikus merevség, belső súrlódás, tartós szilárdság);
- ⇒ építmények számítása gépek okozta periodikus terhelésre;
- ⇒ építmények számítása technológia okozta impulzusteherre;
- ⇒ dinamikus igénybe vett gépalapok számítása;
- ⇒ rudak és rúdszerkezetek rezgései;
- ⇒ lemezek rezgései;
- ⇒ rugalmas héjak dinamikája;
- ⇒ szélerővel terhelte magas építmények dinamikai számítása;
- ⇒ függesztett szerkezetek dinamikai számítása;
- ⇒ mozgó teherrel igénybe vett tartószerkezetek dinamikai számítása;
- ⇒ nagy intenzitású, rövid ideig ható teherrel igénybe vett építmények számítása;
- ⇒ rezgés elleni szigetelés;
- ⇒ rezgés ellen szigetelt, nemlineáris tulajdonságú rendszerek (pl. nemlineáris – kónikus alakított – rugók);
- ⇒ rezgéscsillapítók;
- ⇒ építmények rezgésének kísérleti vizsgálata (*túlhaladott*);
- ⇒ modellalkotás (*nem elméleti számításhoz, hanem laborvizsgálat céljára*).

1) [VÉRTES György, 1984]

A szerző korábbi a korábbi könyvében is leírt dinamikai ismereteket kiegészítette a szabálytalan rezgések és a mozgó tömeg hajlított tartón való vizsgálatával. Az elméleti fejtegetés a kézikönyv jellegnek megfelelően sokkal kevesebb itt, mint korábban.

Itt nem olvashatunk a dinamikai vizsgálatokról.

1) [ANDREY, D.-SUTER, R. 1986]

A lausanne-i műszaki egyetemen szerkesztett, a műtárgyak fenntartásával és javításaival foglalkozó könyvben bemutatják a dinamikai vizsgálatokat, elmondják, hogy ezekkel a szerkezeti rendellenességek mérhetők, követhetők az anyagjellemzők, a merevség és a tömeg változásai. A könyv arról is tájékoztat, hogy mit kell mérni, és ehhez milyen műszerek szükségesek.

1) [WERNER, D. 1989]

A tankönyv feltételezi a teljes műszaki mechanika, a szilárdságtan és a rúdszerkezetek tartók statikájának ismeretét. Nem írja, de nyilván a matematika sem lehet az olvasótól idegen. A rezgés tan minden fogalmát megmagyarázza, illusztrálja, példát mond rájuk.

Az egyszabadságfokú rugalmas rendszerek sajátrezgéseit és gerjesztett rezgéseit vizsgálja először. Leírja a csillapítás matematikailag egyszerű összefüggéseit, a sajátrezgések meghatározásának gyakorlatát az egyik legfontosabb műszaki alkalmazásként definiálja. Beszél a rezgések szigeteléséről, az ütközésekről, a gépek előidézte periodikus terhelésekről. Megadja a különböző dinamikus terhek és az ezen terhek előidézte elmozdulások matematikai leírását.

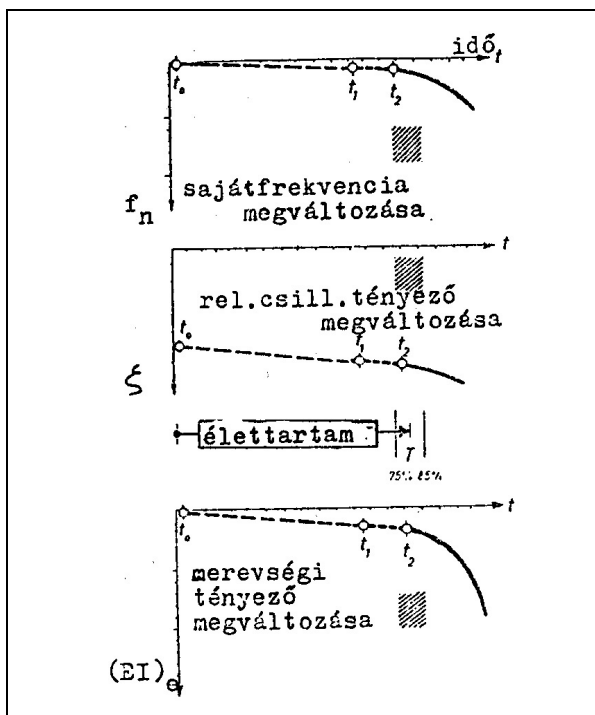
A nemlineáris rezgések közül csak néhány példát említ (pl. nemlineáris rugók, nemlineáris csillapítás), és rámutat azon lehetőségekre, hogy a rezgés visszahat a terhelésre. A szerző arra törekedett, hogy egyszerűen közelítő megoldásokat adjon a nemlineáris problémákra, de mindenképpen olyanokat, amelyek hűen leírják a fizikai jelenséget.

A többszabadságfokú lineáris rendszerek tárgyalása egy sor általános megoldást eredményez: saját-rezgésszámok, sajátrezgés-alakok, dinamikus terhelésből keletkező igénybevételek meghatározása, stb. A gépalapok méretezését is tárgyalja.

A folytonos tömegeloszlású rendszerek elnevezés alatt rudak, rúdszerkezetek, lemezek, héjak, bordás lemezek számítását taglalja a könyv.
A rugalmas hullámok leírása után szó van rendkívüli terhekről, pl. a földrengésről is.

1) [ILLÉSSY József, 1991]⁶

A szerző bemutatja a tartók dinamikai vizsgálatának rezgéstani alapjait és matematikailag részletesen tárgyalja ezeket. Ismerteti a dinamikai – csillapított ill. csillapítatlan folytonos és diszkrét – modelleket, majd az autonom rendszer fizikai modellel ekvivalens modális modelljét.



Az öregedés folyamatának ismertetése és bemutatása a példákon eléggé meggyőző, de szakmai körökben nem váltott ki kellő érdeklődést. – Lineáris összefüggés mutatható ki az eltelt idő és a frekvencia oktánban kifejezett változása között. (ábra) Amikor a lineáris trend megváltozik (t_2 időpont), a híd élettartama befejeződött, átfogó vizsgálatra, felújításra van szükség. Becslések szerint ha a csökkenés egy oktáv (ez várhatóan 100 év alatt következik be), akkor változik a lineáris összefüggés.

Az értékes összeállítás a helyszíni dinamikai mérések műszereire és eszközeire (pl. gerjesztés) és a feldolgozás műszereire és módszereire is kitér, ezeket részletesen ismerteti.

[ILLÉSSY József, 1991]

1) [GYÖRGYI József, 1995, 2003]

A műegyetemi tankönyv kinematikával, kinetikával és dinamikával foglalkozik. Ezen utóbbi fejezeten belül minden alapvető dinamikai témát érint. Úgy mint az egyszabadságfokú rendszerek szabad- és gerjesztett rezgéseit, a többszabadságfokú rendszerek differenciálegyenletét mátrix alakban, a többszabadságfokú rendszerek szabad- és gerjesztett rezgéseit, és építőmérnöki alkalmazásként a rudak szabad rezgéseit.

Egyszerű, könnyen érthető számpéldákkal illusztrálja az elméletet, egyszerű tartókon mutatja be a megoldáshoz szükséges mátrixok meghatározását.
A második kiadás bővebb, szemléletesebb és több számpéldát tartalmaz.

(A Kinematika és a Kinetika ismeretét mindig is oktatták a mérnökhallgatóknak. Egy ideje a gyakorlat követelményeihez igazodva jelent meg a önálló tárgyként is a Dinamika. Ennek alapvető ismerete a statikus tervezők számára ma már elengedhetetlen.)

⁶ L. még → **Ecsedi István:** Néhány energiatétel a rugalmas testek dinamikájában
Műszaki Tudomány 58, 1979 pp.125-138

Ecsedi István: Laplace transzformáció alkalmazása a rugalmasságtan dinamikai feladatainak megoldásában
Műszaki Tudomány 58, 1979 pp.217-222

1.3.3. Tartószerkezetek dinamikus vizsgálata

Az alábbi témakörök szerinti, általam ismert irodalmat is feldolgoztam, de a disszertációban – miután a megszabott keretek között a teljes mérési anyag feldolgozása kizárt – eredeti szándékomtól eltérően, nem foglalkozom a szerkezetek dinamikai vizsgálatával.

1.3.3.1. Általában

L. a Melléklet végén lévő összefoglalót

1.3.3.2. Magasépületek

L. a Melléklet végén lévő összefoglalót

1.3.3.3. Hidak

L. a Melléklet végén lévő összefoglalót

1.3.3.4. Faszervezetek

1) [HARNACH, R. 1987]

Az utóbbi időkben a gazdaságosságra való fokozott törekvés egyre karcsúbb szerkezeteket eredményezett. Szükségessé vált az olyan szerkezetek dinamikai megfelelőségének vizsgálata, amelyeket pl. periodikus gerjesztés terhel. Hiszen a dinamikus igénybe vett szerkezetnek olyannak kell lennie, hogy a rezonanciaveszélyt elkerüljük. Ezt számítással is igazolni kell. Emiatt foglaljuk össze a dinamikai számítások lényegét, hogy a gépi számítások mellett rá tudjunk mutatni a tartók – elsősorban faszervezetek – dinamikailag előnyös kialakítására.

A rezgő szerkezetekre a *tömegezők*, a *csillapító erők*, a *visszatérítő erők* és a *gerjesztőerők* hatnak. Attól függően, hogy ezen erők mindegyike fellép-e, és milyen mértékben, az alábbi esetek különböztethetők meg:

- ⇒ csillapítatlan szabadlengés;
- ⇒ gerjesztett és csillapítatlan lengés;
- ⇒ csillapított szabadlengés;
- ⇒ gerjesztett és csillapított lengés.

Mindegyik lengés lehet mind lineáris, mind nemlineáris. Eseteinkben néhány kivételtől eltekintve mindig csak lineáris rezgések fordulnak elő.

A gerjesztőerők lehetnek periodikus (pl. gép forgó vagy lengő alkatrészsel), kvázi periodikus, ütészerű (pl. fékezés, ütközés) és szochasztikus (pl. szél) erők.

A cikk külön fejezetben foglalkozik az egyszabadságfokú rendszerek lineáris rezgéseivel, a rudak hossz-, csavaró és keresztirányú lineáris rezgéseivel, a faanyag jellegéből adódó specialitásokkal (legfőképpen az anyagjellemzők bizonytalanságát hangsúlyozza), a csillapításokkal (az anyag belső csillapítása, szerkezeti csillapítás, az alapozás miatti csillapítás, a mechanikai energia átadása az érintkező szerkezetekre) valamint a rugóállandók és a sajátrezgésszámok meghatározásával.

Tanácsokat ad a modellalkotásra, a dinamikai számításokra és a szerkezeti kialakításokra.

1) [EMERSON, R.N.- POLLOCK, D.G. – KAINZ, J.A.- FRIDLY, K.J. – McLEAN, D.I. – ROSS, R.J. 1998]

A roncsolásmentes vizsgálat az állagvizsgálat azon tudománya és módszere, amely a szerkezet jövőbeni használhatóságát nem rontja. Alkalmazzák

- ⇒ a szerkezeti elemek vizsgálatára. Ennek módszerei: szemrevételezés, feszültség hullám – a vizsgált anyag felületének összenyomása következtében keletkező hullámok haladási sebességének a mérése – alkalmazása, vizsgálat ultrahanggal, a befúrási ellenállás mérésével a faanyag sűrűségét lehet megállapítani és hibákat felfedezni (ez a kvázi roncsolásmentes eljárás után 1,5-3 mm átmérőjű lyukak maradnak az anyagban), vizsgálat röntgensugárral ill. rövidhullámmal, rezgésekkel. Ezen utóbbi főként a rugalmassági modulus meghatározására alkalmas, a keletkező mechanikai feszültségek mérésére nem. A mért adatok analízise kimutatja a szerkezet meghibásodásait is;

⇒ a teljes híd vizsgálatára, amelyeket

- dinamikai mérésekkel és az eredmények identifikálásával, a szerkezet modálanalízisével, valamint
- statikus próbaterhelésekkel (lehajlásmérés) végezhetünk.

1.3.3.5. Dinamikai számítások, identitásvizsgálat

1) [NATKE, H.G. 1968]

A szerző matematikus. – A sajátrezgések jellemzőinek kísérleti módszerrel való meghatározását nem mérnöki, hanem elsősorban matematikai problémának tekinti. Ebből következően a szerző számára a megméréendő bemenő adatok gyakorlati jelentés nélküli számok. A problémát sokszabadságfokú, kis csillapítású (csillapítatlan tehát konzervatív) lineáris rendszerekre oldotta meg, elsősorban repülőgépek és rakéták vizsgálatát tartva szem előtt. *(Az építőmérnöki problémák egyszerűbbek és szemléletesebben kezelhetők – ám a modell általában pontatlanabb!)*

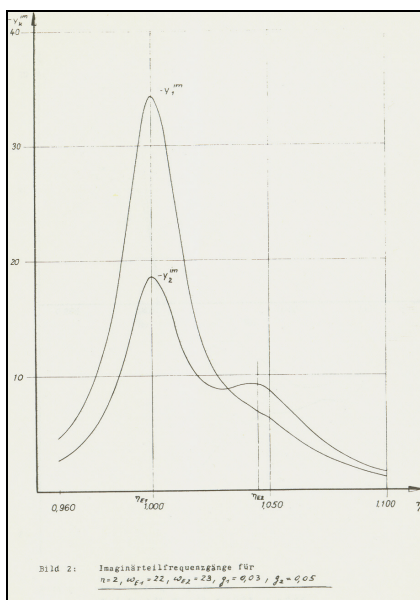
A sajátalakokat, sajátrezgésszámokat, az identifikált tömeg- és merevségi mátrix kísérleti meghatározására két gerjesztési módszer lehetséges. (A gerjesztések közben minél több helyen mérjük a szerkezet válaszait, a rezgés gyorsulásokat vagy a kitéréseket. – Mindkét esetben el kell döntenünk azt, hogy milyen pontossággal kívánunk két értéket azonosnak elfogadni.):

⇒ a szerkezetet változó erővel harmonikusan gerjesztjük, és a folyamatosság során a szabadságfokoknak megfelelő számban a gerjesztő frekvencia találkozik a sajátfrekvenciákkal. (Ezen esetben nehéz a sajátalakokat felrajzolni, mert körülményes egyértelműen hozzárendelni egy-egy kitérést az ottani sajátfrekvenciához. Ehhez a fázisszétválasztás – Phase Separation Technique – módszere szükséges);

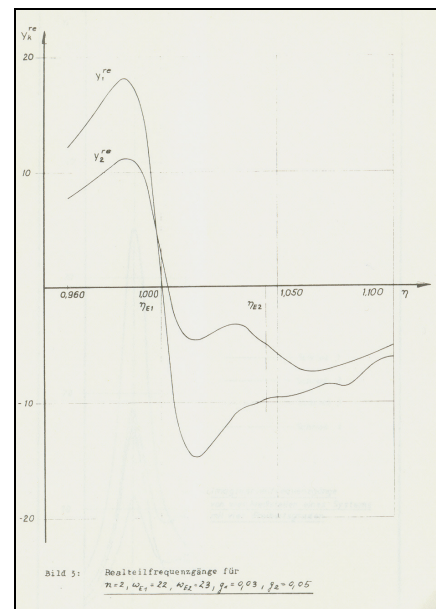
⇒ minden sajátfrekvenciát külön gerjesztünk, és sajátalakot felrajzolása így egyszerűvé válik. Persze tudnunk kell előre meghatározni a gerjesztőfrekvenciákat! Ezen közelítő értéket előre fel kell vennünk.

A két módszer természetesen együtt is alkalmazható: a változó erővel gerjesztett rendszeren közelítőleg meghatározzuk a sajátfrekvenciákat, majd a sajátalakok mindegyikét külön-külön gerjesztve meghatározzuk a pontos alakokat, a csillapításokat és a tömegmátrixot.

1) [NATKE, H.G. 1971]⁷



[NATKE, H.G.
1968]



⁷ L. még → **Keintzel, E.:** Die Schwingungsberechnung unsymmetrischer Geschosßbauten durch Verallgemeinerung des Verfahrens von Holzer *Der Bauingenieur* 49 (1974 pp. 342-347)

A gyengén csillapított (csillapítatlan) rendszereknél a dinamikai jellemzők nem függenek a csillapítás jellegétől. (Viszkózus csillapítás vagy rendszercsillapítás) Ha a rendszer csillapított – tehát a differenciálegyenletben megjelenik a csillapítási mátrix – akkor a megoldáshoz feltételeznünk kell ennek a kezdeti értékét, és a differenciálegyenlet megoldásának első lépcsőjében ebből kell kiindulnunk. – A szerző javasolja, hogy az iteráció hibájaként a mérési pontatlanságot fogadjuk el. Az a számított érték jó, amely a mértől legfeljebb ennyiben különbözik

A mellékelt fenti ábrák vízszintes tengelyén az alapharmonikusra normált sajátfrekvenciák láthatóak, és a frekvenciák valós és képzeltek részének menetét láthatjuk.

2) [NATKE, H.G. 1971]⁸

A gyengén csillapított (csillapítatlan) rendszereknél a dinamikai jellemzők nem függenek a csillapítás jellegétől. (Viszkózus csillapítás vagy rendszercsillapítás) Ha a rendszer csillapított – tehát a differenciálegyenletben megjelenik a csillapítási mátrix – akkor a megoldáshoz fel kell tételeznünk ennek a kezdeti értékét, és a differenciálegyenlet megoldásának első lépcsőjében ebből kell kiindulnunk.

A szerző itt is azt javasolja, hogy az iteráció hibája a mérési pontatlanság legyen. Azaz az a számított érték jó, amely a mértől a mérési hibánál nem különbözik jobban.

1) [GRUNDMANN, H. 1972]⁹

A több lépcsőben elvégezhető iterációs módszer áttekinthető és szemléletes. A tartók sajátfrekvenciájuknál elvesztik elfordulási és eltolódási merevségüket. Egyszerű szerkezeteknél a frekvencia egy-két kiegyenlítési lépés után meghatározható. Több közbenső csomópontú, vagy többszörösen eltolható rendszer esetén meghatározandó determináns rendszáma legfeljebb a mozgásmódszernél használandó determináns rendszámának a fele.

1) [NATKE, H.G.-COLLMANN, D. –ZIMMERMANN, H. 1974]

A cikk második és harmadik szerzője mérnök, akik a korábban matematikailag kidolgozott identitásvizsgálatot építőmérnöki szerkezetekre konkretizálják, és ennek megadják a matematikai korrek-túráját is. A javítás lényege, hogy a dinamikai méréseket statikus mérésekkel egészítik ki, hogy a kezdeti bemenő adatok pontosíthatók legyenek.

Az eredeti elképzelés szerint ugyanis a szabadságfok és a mérőhelyek száma megegyezett, a szabadságfoknak megfelelő számú gerjesztés volt. A gyakorlat ezt nem mindig teszi lehetővé, így a matematikai modellt ezen esetekhez is tudni kell igazítani.¹⁰

1) [FELGENHAUER, H.-P. 1981]

Amennyiben a szerkezeti rendszer időfüggő mozgásegyenletét frekvenciafüggővé (f) transzformáljuk¹¹, akkor definiálhatjuk a dinamikai merevségmátrixot ($\underline{H}(w)$), amellyel megszorozva a frekvenciafüggő gerjesztő erőt, megkapjuk az elmozdulások értékét. Azaz:

$$(-w^2 \cdot \underline{M} + i \cdot w \cdot \underline{D} + \underline{K}) \cdot \underline{x}(w) = \underline{F}(w) \quad \text{®} \quad \underline{x}(w) = (-w^2 \cdot \underline{M} + i \cdot w \cdot \underline{D} + \underline{K})^{-1} \cdot \underline{F}(w) \cdot$$

$$\underline{H}(w) = (-w^2 \cdot \underline{M} + i \cdot w \cdot \underline{D} + \underline{K})^{-1}$$

⁸ L. még → **Keintzel, E.:** Die Schwingungsberechnung unsymmetrischer Geschoßbauten durch Verallgemeinerung des Verfahrens von Holzer *Der Bauingenieur* 49 (1974 pp. 342-347)

⁹ L. még → **Czeglédi Gyula:** Térbeli rúdszerkezetek sajátfrekvenciáinak közrefogó számítása, I. és II. *Műszaki Tudomány* 59, 1980, pp. 53-73 és 149-161

¹⁰ **Natke, H.G.:** Vergleich von Algorithmen für die Anpassung des Rechenmodells einer schwingungsfähigen elektromechanischen Struktur an Versuchswerte. *ZAMM* 59, 257-268 (1979)

¹¹ Ez az u.n. indirekt identifikáció.

Natke, H.G.: Zur Identifikation mechanischer Systeme im Frequenzbereich *Technisches Messen* 50. Jahrgang. 1983 Heft 9 pp.315-322

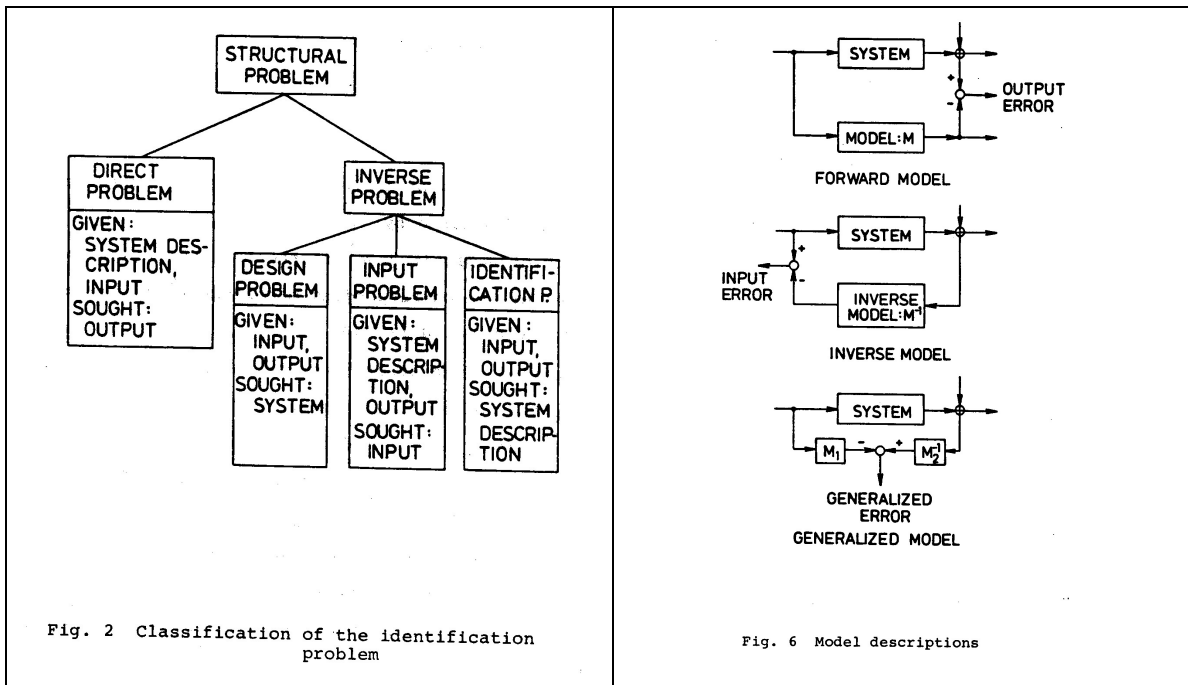
A dinamikai merevségmátrixban leginkább a csillapítások értéke változik. A mért és számított rezgésalakok amplitúdóinak egyeztetésével módosíthatjuk a dinamikai merevségi mátrixot, azaz a tömegmátrixot és a statikus merevségi mátrixot konstansnak feltételezve a csillapítások egyre pontosabb értékeit kaphatjuk meg. A hibahatárt előre meg kell határoznunk.

A lehetséges hiba nagyságának általános és matematikai megfogalmazását l. a ¹²-ben.

1) [NATKE, H.G. 1982a]

A cikkek nagyon közérthető formában, csak a szükséges egyszerű matematikai leírással tartalmazzák a csillapított rendszerek identitásvizsgálatát. Tulajdonképpen az előző írások összefoglalója matematikai részletezés nélkül.

Érdeemes kiemelni a folyamatábrákat és – táblázatokat (ábra):



[NATKE, H.G. 1982]

SYSTEM SPECIFICATION	CONSERVATIVE SYSTEM	SYSTEM SPECIFICATION	VISCOUS DAMPED SYSTEM	SYSTEM SPECIFICATION	HYSTERETIC DAMPED SYSTEM
MATRIX EIGENVALUE PROBLEM	$(-\lambda_{oi} M + K) \hat{u}_{oi} = 0$ $i = 1(1)n, M_0 = I$	MATRIX EIGENVALUE PROBLEM	$(\lambda_{oi}^2 M + \lambda_{oi} B + K) \hat{u}_{oi} = 0$ $i = 1(1)2n, \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T M \hat{u}_{oi} + \hat{u}_{oi}^T B \hat{u}_{oi} = I$	MATRIX EIGENVALUE PROBLEM	$(-\lambda_{oi}^2 M + K + jD) \hat{u}_{oi} = 0$ $i = 1(1)n, M_0 = I$
INERTIA MATRIX	$M = (\hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T)^{-1}$	INERTIA MATRIX	$M = (\hat{u}_{oi} \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T)^{-1}$	INERTIA MATRIX	$M = (\hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T)^{-1}$
INVERSE INERTIA MATRIX	$M^{-1} = \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T = \sum_{i=1}^n \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T$	INVERSE INERTIA MATRIX	$M^{-1} = \hat{u}_{oi} \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_{oi} \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T$	INVERSE INERTIA MATRIX	$M^{-1} = \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T = \sum_{i=1}^n \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T$
DAMPING MATRIX	---	DAMPING MATRIX	$B = -M \hat{u}_{oi} \Delta_0^2 \hat{u}_{oi}^T M$ $= -\sum_{i=1}^n \lambda_{oi}^2 M \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T M$	DAMPING MATRIX	$B = \text{Im}((\hat{u}_{oi}^T \Delta_0 \hat{u}_{oi})^{-1})$ $= \text{Im}(M \hat{u}_{oi} \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T M)$
STIFFNESS MATRIX	$K = (\hat{u}_{oi}^T)^{-1} \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T$ $= M \hat{u}_{oi} \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T M$ $= \sum_{i=1}^n \lambda_{oi} M \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T M$	STIFFNESS MATRIX	$K = -M \hat{u}_{oi} \Delta_0^2 (I - \hat{u}_{oi}^T M \hat{u}_{oi} \Delta_0)$ $= \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T M$	STIFFNESS MATRIX	$K = \text{Re}((\hat{u}_{oi}^T \Delta_0 \hat{u}_{oi})^{-1})$ $= \text{Re}(M \hat{u}_{oi} \Delta_0 \hat{u}_{oi}^T M)$
FLEXIBILITY MATRIX	$G = K^{-1} = \hat{u}_{oi} \Delta_0^{-1} \hat{u}_{oi}^T$ $= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{oi}} \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T$	FLEXIBILITY MATRIX	$G = K^{-1} = -\hat{u}_{oi} \Delta_0^{-1} \hat{u}_{oi}^T$ $= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{oi}} \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T$	FLEXIBILITY MATRIX	$(K + jD)^{-1} = \hat{u}_{oi} \Delta_0^{-1} \hat{u}_{oi}^T$ $= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{oi}} \hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T$
FREQUENCY RESPONSE MATRIX	$E(j\omega) = (-\omega^2 M + K)^{-1}$ $= \hat{u}_{oi} (-\omega^2 I + \Delta_0)^{-1} \hat{u}_{oi}^T$ $= \sum_{i=1}^n \frac{\hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T}{-\omega^2 - \lambda_{oi}}$	FREQUENCY RESPONSE MATRIX	$E(j\omega) = (-\omega^2 M + j\omega B + K)^{-1}$ $= \hat{u}_{oi} (j\omega I - \Delta_0)^{-1} \hat{u}_{oi}^T$ $= \sum_{i=1}^n \frac{\hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T}{j\omega - \lambda_{oi}}$	FREQUENCY RESPONSE MATRIX	$E(j\omega) = (-\omega^2 M + K + jD)^{-1}$ $= \hat{u}_{oi} (-\omega^2 I + \Delta_0)^{-1} \hat{u}_{oi}^T$ $= \sum_{i=1}^n \frac{\hat{u}_{oi} \hat{u}_{oi}^T}{-\omega^2 - \lambda_{oi}}$

ble 1.1 Relations between system parameter matrices and modal magnitudes

Table 1.2 Relations between system parameter matrices and modal magnitudes

Table 1.3 Relations between system parameter matrices and modal magnitudes

[NATKE, H.G. 1982]

¹² Natke, H.G.: Angenäherte Fehlerermittlung für Modalsynthese – Ergebnisse innerhalb der Systemanalyse und Systemidentifikation ZAMM 61, 41-53 (1981)

1) [ILLÉSSY József, 1982]

A szerző a roncsolásos szerkezetvizsgálattal szemben hangsúlyozza a roncsolásmentes vizsgálatok előnyeit és kikerülhetelenségét. A dinamikai vizsgálatok elvi alapját felírva ismerteti a manapság használatos roncsolásmentes helyszíni vizsgálatokat:

- ⇒ hidak felszerkezetének vizsgálata;
 - § statikus próbaterhelések
 - § kvázistatikus próbaterhelések
 - § dinamikus gyorspróbák, amelyeket ugyanazon szerkezeten rendszeresen elvégezve az öregedés folyamatát is bemutatják
- ⇒ alépítmények dinamikus vizsgálatának lehetősége;
- ⇒ stabilitási vizsgálatok az első sajátfrekvencia megméréssel;
- ⇒ magas építmények állapotvizsgálata (pl. földrengés után).

1) [NATKE, H.G. 1982b]

Korábban addig változtattuk a (szerkezeti) modellt leíró jellemzőket, amíg a mért eredmények meg nem egyeztek a számítottakkal. A változtatás nem mindig volt szisztematikus, s főként nem mindig egyértelmű! Ma már a mért és számított eredmények azonosítása úgy történik, hogy rendszerjellemzőket (pl. erők, reakciók, dinamikai tulajdonságok) mérünk, és ezekhez matematikailag egyértelműen korrigáljuk a modellparamétereket (merevség, teherbírás, hajlékonyság, csillapítás) egy lehetőleg pragmatikus és gazdaságos folyamat eredményeképpen. Alkalmazunk statisztikai eloszlásokat (pl. tömeg, keresztmetszeti méretek), végezhetünk a modellen érzékenységvizsgálatokat (egy adott jellemző megváltoztatása mennyire befolyásolja pl. a dinamikai tulajdonságokat, stb.), a legmegfelelőbb érték kiválasztásához alkalmazzuk a hibanégyzet módszert. – A nagy rendszerek sok előre meghatározandó paraméterrel még egyelőre problémát jelentenek.¹³

1) [NATKE, H.G. 1984]

A mechanikai rendszerek identifikációjának minősége (jósága) az „a priori” (mérések előtti) adatoktól függ, és ilyen adatokból a lehető legtöbbet kellene alkalmaznunk. Ezen adatok a modellekkel helyettesített szerkezetek jellemzőinek pontos megismeréséhez szükségesek. A megoldási módszerek:

- ⇒ lineáris rendszerek: a számítási modell paramétereinek kezdeti meghatározása különbözőképpen bizonytalan, a mért értékek esetleges mérési hibát tartalmaznak, a mért nagyságok nem tökéletesek. A számítási modellt modálanalízissel pontosítanunk kell;
- ⇒ nemlineáris rendszerek: a modellt alrendszerekre kell bontanunk, és ezeket valamelyik ismert módszerrel linearizálni kell.

1) [POPPER György, 1986]

A szerző feltételezi, hogy egy n szabadságfokú rezgő rendszer mozgását és a sajátfrekvenciáit mérésekből ismerjük. A mért és a számított értékek közötti különbség – hiba – a csillapítási mátrix helyes felvételével minimalizálható. Ha megfogalmazzuk a hibafüggvényt, és felírjuk ennek nagyságát az euklideszi norma segítségével, akkor a választott frekvenciaintervallumban kapunk egy nemnegatív valós függvényt. Ha feltesszük, hogy ezen függvény négyzetesen integrálható, akkor a hibafüggvény nagyságának becslésére alkalmazható egy integrálnorma – $J(\mathbf{d})$ –, így az azonos $J(\mathbf{d})$ integrált minimalizáló \mathbf{d} csillapítási vektor megkeresésével.

1) [FLESCHE, R. 1988]

A szerző összefoglalja az építmények dinamikai vizsgálatához szükséges jellemzőket, azok megváltozását előidéző hatásokat, a jellemzők megváltozásának hatásait, a dinamikai terheléseket (gépek, közlekedés, földrengés), a lehetséges vizsgálati módszereket (számítás, helyszíni mérés, la-

¹³ Cottin, N. – Felgenhauer, H.P. - Natke, H.G.: On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals
Ingenieur-Archiv 54 (1984) pp. 378-387

borkísérlet), néhány jelentős mérnöki létesítmény (völgyzáró gátak, hidak, magas létesítmények) dinamikai követelményeit.

A második részben az építménydinamika elméletét, a modellek kialakítását, a dinamikai méréseket (fajták, a helyszín berendezése, a szükséges mérőműszerek, a gerjesztések, várható eredmények), a mérési eredmények feldolgozását és az identifikálást ismerteti. **Nagyon egyszerű matematikával megfogalmazott átfogó összefoglalás.**

1) [WALLASCHEK, J. 1992]

Ismerjük a lehetőséget, amely szerint a kocogtatásra kapott hangból meg tudjuk állapítani, hogy pl. egy üveg pohár vagy porcelán tárgy repedt-e? Ugyanezen tulajdonságot tudjuk kihasználni tartószerkezetek esetében is, azaz ha kimutatjuk a dinamikai jellemzők megváltozását, abból ítéletet mondhatunk arra, hogy egy korábbi állapothoz képest módosult-e a szerkezet? Ezzel hibákra hívhatjuk fel a figyelmet és megakadályozhatjuk a továbbromlást.

A szerző a továbbiakban csillapítatlan síkbeli rendszerek olyan rezgéseivel foglalkozunk, amelyek pozitív definit önadjungált kerületi problémaként felírhatók.

Ismerjük a nemparaméteres identifikációt, amikor a rendszer „fekete doboz”, nem ismert (Natke), és a paraméteres identifikáció matematikailag explicit megfogalmazott rendszerére épül.

A paraméteres identifikáció matematikailag vagy a sajátalakokat leíró függvények ortogonalitására épül, vagy a Green-függvény segítségével felírt sajátértékproblémák integrálegenleteire.

Kereshetünk ismert tömegeloszláshoz merevségeloszlást, és ismert merevségeloszláshoz tömegeloszlást. A leírás a mérnöki területről vett példákat tartalmaz. (Konzol, kéttámaszú gerenda.)

1) [PABST, U. 1993]

A tanulmány a helyes modellalkotásra hívja fel a figyelmet. (Beszél a különböző célokra létrehozott modellekről, pl. gazdasági, politikai. Ezen esetekben nincs átviteli összefüggés a bemenő és kimenő adatok között.) – A modellek három fajtája használatos:

- ⇒ fekete doboz: a rendszerről nincsenek „a priori” ismereteink, az identifikáció kizárólagosan a mért adatokra támaszkodik;
- ⇒ fehér doboz: a rendszer fizikai és matematikai leírását egyaránt ismerjük;
- ⇒ szürke doboz: a nem teljesen ismert rendszer feldolgozásához szükséges paramétereit mérésből határozza meg.

A leírt identifikálási eljárás (példája egy síkbeli lemez) az ismeretlen mennyiségek közé sorolja a kerületi feltételeket is. Tehát a paraméteres identifikáció akkor lesz elvégezhető, ha előzőleg mérésekkel tisztázzuk a rendszer kerületi feltételeit. (Pl.: merev vagy rugalmas támasz.)

1) [Lőrincz György, 1998 és 1999]

A két cikk – más-más körülményt kiemelve ugyan – bemutatja a laboratóriumban elvégzendő kísérletek leírását, célját. Az egyes kialakításokat érzékenységvizsgálattal alátámasztva megmagyarázza, hogy a sikeres identitásvizsgálatok céljából mit lehet elvárni egy-egy mérések közbeni szerkezeti változtatástól.

A kísérletek elvégzése után néhány, az elméletből következő feltevés (pl. egyszerűen és egyértelműen meghatározható kapcsolat az elmélet és a gyakorlat között) kissé árnyaltabb!

2) [Lőrincz György, 2006]

A cikk összefoglalja a fagerendán végzett laboratóriumi gerendakísérletet. Az ismeretlen statikai mennyiségek meghatározását, a sajátfrekvenciák értékeit, a teljes feldolgozás utáni várható következtetéseket. Azaz: a tényleges szerkezeteken annyi a kis dinamikai változást előidéző módosulás, hogy ezeknek pontosan definiált oka kideríthetetlen.

1.3.4. A hivatkozott irodalom felsorolása

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|--|
| 1 | HEILIG, R. | 1953a | ZUR THEORIE DES STARREN VERBUNDS
<i>Der Stahlbau, 22.Jahrgang Heft 4 1953, pp. 84-90</i> |
| | | 1953b | ZUR THEORIE DES ELASTISCHEN VERBUNDS
<i>Der Stahlbau, 22.Jahrgang Heft 5 1953, pp 104-108</i> |
| 2 | TIMOSHENKO, S. –
YOUNG, D. H. | 1955
(1927) | VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING
<i>D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey</i> |
| 3 | KOLLÁR Lajos –
MAJOR Sándor –
KIRÁLY Béla | 1959 | TARTÓSZERKEZETEK DINAMIKÁJA
<i>Mérnöki Kézikönyv, 3.kötet, pp.279-315</i>
<i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i> |
| 4 | BOSZNAY Ádám | 1962 | MŰSZAKI REZGÉSTAN
<i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest,</i> |
| 5 | CHOLNOKY Tibor | 1966 | MECHANIKA I.,II.,III.
<i>Tankönyvkiadó, Budapest</i> |
| 6 | NATKE, H.G. | 1968 | EIN VERFAHREN ZUR RECHNERISCHEN ERMITTLUNG DER EIGENSCHWINGUNGSGRÖSSEN AUS DEN ERGEBNISSEN EINES SCHWINGUNGSVERSUCHES IN EINER ERREGERKONFIGURATION
<i>Dissertation, kézirat, TH München, 1968</i> |
| 7 | PISCHL, R. | 1968 | EIN BEITRAG ZUR BERECHNUNG ZUSAMMENGESETZTER HÖLZERNER BIEGETRÄGER
<i>Der Bauingenieur 43 (1968) Heft 12, pp.448-452</i> |
| 8 | PISCHL, R. | 1969a | DIE PRAKTISCHE BERECHNUNG ZUSAMMENGESETZTER HÖLZERNER BIEGETRÄGER MIT HILFSTAFELN ZUR BERECHNUNGS DER ABMINDERUNGSFAKTOREN
<i>Der Bauingenieur 44 (1969) Heft 5, pp.181-185</i> |
| 9 | PISCHL, R. | 1969b | DIE AUSLEGUNG DER VERBINDUNGSMITTEL BEI ZUSAMMENGESETZTEN HÖLZERNEN BIEGETRÄGERN
<i>Der Bauingenieur 44 (1969) Heft 11, pp.419-423</i> |
| 10 | SZABÓ János –
ROLLER Béla | 1971 | RÚDSZERKEZETEK ELMÉLETE ÉS SZÁMÍTÁSA
<i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i> |
| 11 | NATKE, H.G. | 1971 | DIE BERECHNUNG DER EIGENSCHWINGUNGSGRÖSSEN EINES GEDÄMPFTEN SYSTEMS AUS DEN ERGEBNISSEN EINES SCHWINGUNGSVERSUCHES IN EINER ERREGERKONFIGURATION
<i>Jarhbuch 1971 der DGLR, pp.98-120, Habilitationsschrift</i> |
| 12 | GRUNDMANN, H. | 1972 | DIE BERECHNUNG VON EIGENFREQUENZEN MIT HILFE EINES MOMENTENGLEICHENS-VEFAHREN
<i>Der Bauingenieur, 49 (1972) Heft 5, pp. 171-175</i> |
| 13 | STÜSSI, Fritz
DUBAS, Pierre | 1971 | GRUNDLAGEN DES STHLBAUES
<i>Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York</i> |
| 14 | STÜSSI, Fritz | 1971 | VORLESUNGEN ÜBER BAUSTATIK 1-2
<i>Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart</i> |
| 15 | SZMODITS Kázmér | 1972 | KERETSZERKEZETEK STATIKÁJA, DINAMIKÁJA ÉS STABILITÁSA
<i>Akadémiai Kiadó, Budapest</i> |

Nyugat-Magyarországi Egyetem Faipari Mérnöki Kar	DOKTORI (PH.D.) ÉRTEKEZÉS	Lőrincz György okl. építőmérnök
16 RÓZSA Pál	1974	LINEÁRIS ALGEBRA ÉS ALKALMAZÁSAI <i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i>
17 NATKE, H.G.- COLLMANN, D. – ZIMMERMANN, H.	1974	BEITRAG ZUR KORREKTUR DES RECHENMODELLS EINES ELASTOMECHANISCHEN SYSTEMS ANHAND VON VERSUCHSERGEBNISSEN <i>VDI-Berichte Nr. 221, pp.23-32</i>
18 LYON, Richard H.	1975	STATISTICAL ENERGY ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS <i>The MTI Press, kézirat</i>
19 KORN, G.A – KORN, T.M.	1975	MATEMATIKAI KÉZIKÖNYV MŰSZAKIAKNAK <i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i>
20 VÉRTES György	1976	ÉPÍTMÉNYEK DINAMIKÁJA <i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i>
21 KORENEV, B.G. – RABINOVIÉ, I.M.	1980	BAUDYNAMIK <i>VEB Verlag für Bauwesen, Berlin</i>
22 FELGENHAUER, H.-P.	1981	IDENTIFIKATION VOLLSTÄNDIGER, NICHTPRO- PORTIONALER DÄMPFUNSMATRIZEN ANHAND EXPERIMENTELL ERMITTELTEN SYSTEMANTWORTEN <i>VDI Berichte Nr.419, pp.17-28</i>
23 NATKE, H. G.	1982a	IDENTIFICATION OF VIBRATING STRUCTURES <i>CISM Courses and Lectures No. 272 Springer Verlag Wien-New York</i>
24 NATKE, H. G.	1982b	DIE SYSTEMATISCHE ANPASSUNG VON RECHEN- MODELLEN AN VERSUCHSWERTE ALS VERFAHREN ZUM NACHWEIS DES DYNAMISCHEN SYSTEM- VERHALTENS <i>Bauingenieur 57 (1982) pp. 287-292</i>
25 RÓNAI Ferenc - SOMFALVI György	1982	FA TARTÓSZERKEZETEK TERVEZÉS, MÉRETEZÉS <i>Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i>
26 ILLÉSSY József	1982	RONCSOLÁSMENTES SZERKEZETVIZSGÁLATOK EGYES LEHETŐSÉGÉRŐL <i>Építési kutatás fejlesztés 2-3, pp.92-97</i>
27 NATKE, H.G.	1984	ZUR IDENTIFIKATION MECHANISCHER SYSTEME <i>Tagung Dynamische Probleme – Modellierung und Wirklichkeit – in Hannover Okt. 1984 pp. 417-439</i>
28 VÉRTES GYÖRGY	1984	A TARTÓSZERKEZETEK DINAMIKÁJA <i>Mérnöki Kézikönyv II. kötet, pp. 324-369 Műszaki Könyvkiadó, Budapest</i>
29 ANDREY, Dominique – SUTER, René	1986	MAINTENANCE ET RÉPARATION DES OUVRAGE D'ART <i>École Polytechnique Fédérale de Lausanne 1986</i>
30 MÖHLER, K.	1986	VERSCHIEBUNGSGRÖSSEN MECHANISCHER HOLZ- VERBINDUNGEN DER DIN 1052, TEIL 2 (ENTWURF 1984) <i>bauen mit holz 4/86, pp.206-214</i>
31 POPPER György	1986	DINAMIKAI FELADATOK PARAMETRIKUS IDENTIFI- KÁCIÓJA <i>Építés-építészettudomány XXV. kötet, 3-4. sz., pp. 104-408</i>

Nyugat-Magyarországi Egyetem Faipari Mérnöki Kar	DOKTORI (PH.D.) ÉRTEKEZÉS	Lőrincz György okl. építőmérnök
32 SOARE, Mircea V.	1986	STRUCTURI DISCRETE SI STRUCTURI CONTINUE IN MECANICA CONSTRUCTIILOR <i>Editura Academiei Republicii Socialiste Ramania, Bucuresti, 1986</i>
33 HARNACH, R.	1987	ZUR SCHWINGUNGSBERECHNUNG VON HOLZ-TRAGWERKEN <i>bauen mit holz 11/87 pp.725-729 és 12/87 pp.810-814</i>
34 FLESCHE, R.	1988	DIE METHODEN DER BAUDYNAMIK MIT SPEZIELLER BERÜCKSICHTIGUNG IHRER ANWENDBARKEIT ZUR BAUWERKINSPEKTION <i>Habilitationsschrift, kézirat, TU Graz 1988</i>
35 DIN 1052 Teil I	1988	HOLZBAUTRAGWERKE, BERECHNUNG UND AUSFÜHRUNG <i>Beton-Kalender 1990, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf 1990</i>
36 MSZ 15025–1989	1988	ÉPÍTMÉNYEK TEHERHORDÓ FASZERKEZETEINEK ERŐTANI TERVEZÉSE <i>Magyar Szabványügyi Hivatal</i>
37 KOLB, Josef	1988	SYSTEMBAU MIT HOLZ <i>Baufachverlag AG Zürich</i>
38 WERNER, Diethelm	1989	BAUDYNAMIK <i>VEB Verlag für Bauwesen, Berlin</i>
39 SELL, Jürgen	1989	EIGENSCHAFTEN UND KENNGRÖSSEN VON HOLZARTEN <i>Baufachverlag AG Zürich</i>
40 KNEINDL, R.	1990	EIN NUMERISCHES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG VON TRÄGERN MIT VERÄNDERLICHEM NACHGIEBIGEM VERBUND <i>Bauingenieur 65 (1990) pp.281-288</i>
41 ILLÉSSY József	1991	TARTÓSZERKEZET-DIAGNOSZTIKA KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A HIDAK KÜLÖNBÖZŐ PRÓBATERHELÉSI, TESZTELÉSI LEHETŐSÉGEIRE <i>Tanulmány, kézirat, Budapest 1991.</i>
42 RÓNAI Ferenc	1992	MECHANIKA I. <i>Erdészeti és Faipari Egyetem, kézirat, Sopron 1992</i>
43 WALLASCHEK, Jörg	1992	PARAMETERIDENTIFIKATION LINEARER UNGEDÄMPFTER MACHANISCHER KONTINUA ANHAND VON EIGENFREQUENZEN UND EIGENSCHWINGUNGSFORMEN <i>Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 160 Düsseldorf, VDI Verlag</i>
44 PAPST, Ulrich	1993	IDENTIFIKATION VON RANDBEDINGUNGEN UND RISSEN IN EINFACHEN SCHWINGENDEN ELASTISCHEN KONTINUA <i>Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 192 Düsseldorf</i>
45 POPPER György – CSIZMÁS Ferenc	1993	NUMEREIKUS MÓDSZEREK MÉRNÖKÖKNEK <i>Akadémiai Kiadó - TYPOT_EX, Budapest</i>
46 DABAON, M.- TSCHEMMERNEGG, F.- HASSAN, K.-A. LATEEF T	1993	ZUR TRAGFÄHIGKEIT VON VERBUNDTRÄGERN BEI TEILWEISER VERBÜBELUNG <i>Stahlbau 62 (1993) Heft 1, pp.3-9</i>

Nyugat-Magyarországi Egyetem Faipari Mérnöki Kar	DOKTORI (PH.D.) ÉRTEKEZÉS	Lőrincz György okl. építőmérnök
47 SITKEI György	1994	A FAIPARI MŰVELETEK ELMÉLETE <i>Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó Kft., Budapest 1994</i>
48 SZALAI József	1994	A FAANYAG ÉS FAALAPÚ ANYAGOK ANIZOTRÓP RUGALMASSÁG- ÉS SZILÁRDSÁGTANA I.RÉSZ <i>Sopron 1994</i>
49 GYÖRGYI József	2003	DINAMIKA <i>Műegyetemi Kiadó, Budapest</i>
50 KLINCSIK Mihály- MARÓTI György	1995	MAPLE 8 TÉTEL BEN <i>Novadat</i>
51 MOLNÁRKA Győző- GERGÓ Lajos-WETTL Ferenc-HORVÁTH And- rás-KALLÓS Gábor	1996	A MAPLE V ÉS ALKALMAZÁSAI <i>SPRINGER Verlag, Budapest</i>
52 EMERSON, N.R.- POLLOCK, D.G.- KAINZ, J.A.- FRIDLEY, K.J.- MCLEAN, D.I. – ROSS, R.J.	1998	NONDESTRUCTIV EVALUATION TECHNIQUES FOR TIMBER BRIDGES <i>5th Word Conference on Timber Engineering, Montreaux 1998. pp.670-677</i>
53 LŐRINCZ György	1998	HOW TO MEASURE DYNAMIC CHARACTERISTICS FOR DIAGNOSTICS OF STRUCTURES <i>Materialele conferintei nationale, Buzias, pp.57-68</i>
54 SZABÓ Miklós	1998	GÉPÉSZETI TERVEZÉSI SEGÉDLET <i>Ferroplan Kft., Szombathely</i>
55 LŐRINCZ György	1999	TARTÓSZERKEZETEK DIAGNOSZTIKAI VIZSGÁLA- TA. ÖSSZEFÜGGÉSEK MEGHATÁROZÁSA LABORA- TÓRIUMI MÉRÉSEK KELL I. <i>Soproni Egyetem Tudományos Közleményei 1996-1999.év 42- 45.évfolyam pp.135-147</i>
56 MSZ ENV 1995-1:2000	2000	EUROCODE 5: FASZERKEZETEK TERVEZÉSE 1-1. rész: Általános és az épületekre vonatkozó szabályok
MSZ ENV 1995-2:1999	1999	<i>Magyar Szabványügyi Társaság</i>
57 NAD MSZ ENV 1995-1-1	2001/ 2002	FASZERKEZETEK TERVEZÉSE 1.1.rész: Általános és az épületekre vonatkozó szabályok <i>Magyar Szabványügyi Társaság</i>
58 LŐRINCZ György	2006	EGY FASZERKEZETŰ TARTÓ SZÁMÍTÁSI MODELLJÉ- NEK KIALAKÍTÁSA. – A TARTÓ DINAMIKAI VISEL- KEDÉSÉNEK VÁLTOZÁSA SZERKEZETI ÉS KERESZT- METSZETI MÓDOSULÁSOK MIATT. <i>Magyarország földrengésbiztonsága. Modellezés, méretezés. Mérnökszeizmológiai Tudományos Konferencia, Széchenyi István Egyetem, Szerkezetépítési Tanszék, Győr, 2004. novem- ber 4-5., pp.393-422</i>

2. A MÉRÉSRŐL

A Kísérleti jegyzőkönyvben (**Kjv.**)-ben közölt statikus mérési adatoknak nincs mértékegységük, arányt jelentenek. (Az induktív úradók mérési tartománya 10 000, az erőmérőké pedig 2000 részre, digitre van felosztva. Tehát tartományon belül ennyi különböző értéket tudnak kimutatni. (Pl. a W 50K jelű úradó mérési tartománya 50 mm, ez 10 000 digit, így $10\,000/50 = 200$ digit változás jelent 1 mm elmozdulást. – Vagy az erőmérő méréshatára 50 kN, így 1 kN erőváltozáshoz $2000/50=40$ digit mérési eredmény-változás tartozik, azaz esetünkben a mérési eredmény egységnyi változása a terhelő erő 25 N változását jelenti.)

A rezgés gyorsulás erősségét nem kalibráltuk, azaz a mért értékekből nem mondható meg, hogy egy adott mV mértékegységű feszültség mekkora rezgés gyorsulásnak felel meg pl. m/sec^2 egységben.

A mérési eredmények feldolgozását a **Kjv.** nem tartalmazza. A feldolgozást és az ábrázolást az MS Excel[®] és a Maple V segítségével végeztük.

Amennyiben mindegyik tartó valamely azonos pontjának függőleges eltolódásait az alkalmazott terhekre a tartó mindegyik állapotában (azaz az egyes változások –**Kjv.** 6-11 oldalak – után) ábrázoljuk, akkor az egyes szerkezetek mindegyik állapotában láthatjuk és összevethetjük egymással ugyanazon pont lehajlását. – Tanulmányozzuk a terhelő erő-lehajlás görbéket az összefüggés jellege szempontjából!

Várható volt, hogy az **CE jelű**, a legmerevebb tartó erő-lehajlás függvénye van a lineárishoz legközelebb¹⁴. (1.táblázat) Mindegyik állapotban megadható egy egyenes, amely jó gyakorlati pontossággal rendel egy másikhoz a terhelő erő nagyságát és a tartó középső keresztmetszetének e terhelés hatására létrejött lehajlásait. A pontosabb megoldás kettő vagy három egymást metsző egyenes lenne. Más összefüggés érvényes a görbék kezdetén (≈ 5 kN terhelés alatt), és más a többi szakaszon. Tehát: a tartó hajlékonysága függ a terheléstől, azaz a merevségi mátrix lineáris elmélettel számított elemei pontatlanok lesznek.

A • **jelű** tartó, az elvileg szimmetrikus kétszeres feszítőmű erő-elmozdulás összefüggései a többihez képest szétszórtak, azaz az egyes állapotokban a többi tartóhoz képest nagyobbak a lehajláskülönbségek (2.táblázat). Ez lehet a tartó sajátja, de adódhatott a csavarok meghúzásának eltéréseiből, vagy valamely fel nem tárt külső körülményből is, pl. abból, hogy a terhelés nem pontosan a tartó síkjában volt.

A görbék kevésbé lineárisak, mint az **CE j.** tartónál. A felső görbék közelíthetők egyenessel,

¹⁴ Ez nagyításban is így látszik.

az alsókra másodfokú közelítés írható fel. A korrelációs koefficiens négyzete (R^2) 1-hez közelálló. A fenti görbékre is áll, hogy több szakaszban közelíthetők egymást metsző egyenesekkel, azaz a merevségi mátrix elemei a i, j . tartó esetén is pontatlanok.

A négy tartó közül az egyszeres feszítőmű, a **Ž jelű** tartó (3.táblázat), elvileg sem szimmetrikus. Az egyik közbenső támasz kiesése miatt a lehajlások jelentősen megnöttek. Az erő-lehajlás görbe nem lineáris, hanem másod- vagy harmadfokú, mindkét esetben $R^2 \approx 1$. (Egyenessel való közelítés esetén sem sokkal rosszabb a közelítés, de a regressziós egyenes nem a (0;0) pontból indul.) Ha két szakasszal közelítem, akkor az egyik egyenes várhatóan a 0-5 kN, a másik a 5-25 kN terhek között lesz érvényes.

Tehát a fenti esetben is igaz az, hogy a linearitás mértéke függ a terhelő erő nagyságától, tehát a lineárisan kiszámított merevségi mátrix elemei megbízhatatlanok.

A kéttámaszú, **• jelű** tartó (4. táblázat) esetén a lehajlások természetesen tovább nőttek, az egyenessel való közelítés könnyebb, de itt is két egyenes írható fel. A 0-5 kN és az 5-25 kN között. Az egyes állapotokban legegyszerűbb esetben egyenletesen változó a tartó viselkedése.

Összefoglalóan elmondhatjuk:

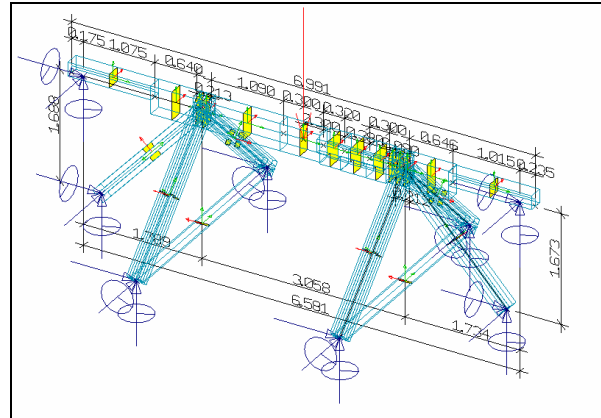
- mindegyik tartó valamely pontjának erő-lehajlás görbéje könnyen közelíthető több egyenessel (a többi vizsgált pontra felrajtolt ábrák is ezt mutatják). Azaz: a határállapotra vonatkozó tervezés során a linearitást nem kell kétségbe vonnunk;
- az egységterő környékén, amelynek alkalmazásával a tartó hajlékonysága, és ebből a merevsége számítható, az erő-lehajlás görbe nem lineáris. Azaz a számítással előállított merevségi értékek pontatlanok.

A Kísérleti jegyzőkönyvben rögzített mérési eredmények mindegyikét egy disszertációban terjedelmi okokból nem lehetséges feldolgozni. Az elképzelésem, amely ezt célozta irreális volt. – Feldolgozásra választom a várhatóan legegyszerűbb/legkövethetőbb esetet, a kéttámaszú tartót. A többi tartó feldolgozása ettől lényegesen nem tér el. A statikai vázok anyagiban különbözik, hogy a gerenda és a ferde lábak csatlakozásánál be kell iktatni egy-egy alul csuklós végű rudat, amely a gerendához rugalmas befogással csatlakozik. A rugalmas befogás jellemzőjét, az erőhöz rendelt elfordulást mértük, tehát ez nem ismeretlen adat.

A mérési adatok feldolgozása során hangsúlyosan felvetődött az, hogy a vizsgált tartók szerkezeti kialakításuk miatt nem lineárisak.

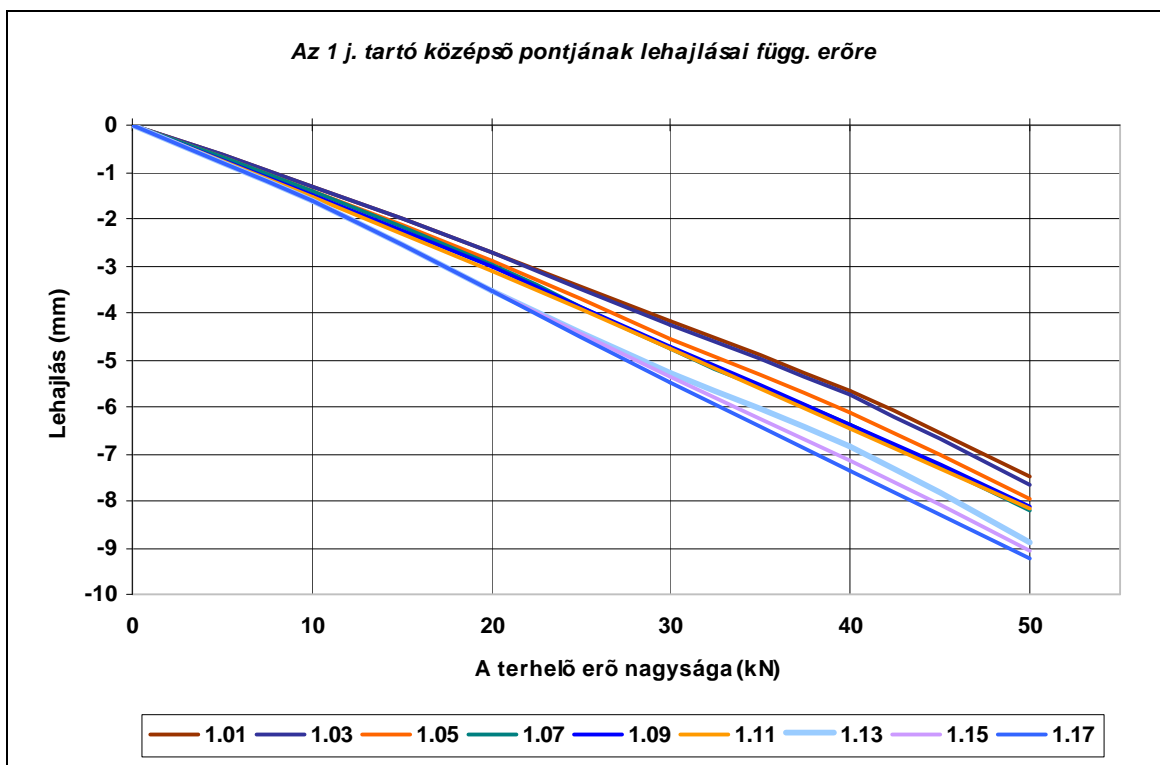
1. táblázat

Œ j. tartó közepső („ ... j.) pontjának lehajlásai (mm)



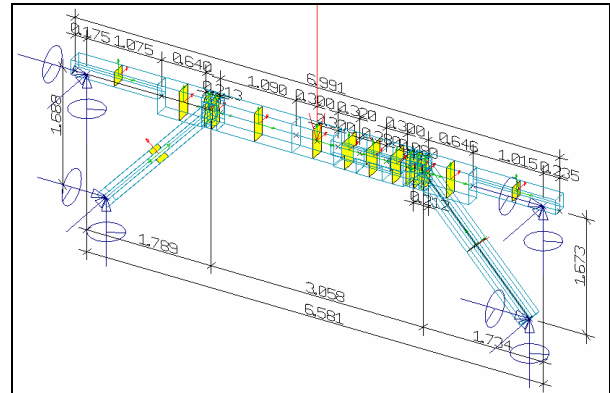
A tartó jele és állapota	Koncentrált függőleges erő a közepső pontban (kN)					
	0	10	20	30	40	50
1.01	0	-1,335	-2,740	-4,164	-5,671	-7,475
1.03	0	-1,322	-2,718	-4,256	-5,751	-7,660
1.05	0	-1,402	-2,910	-4,535	-6,131	-7,940
1.07	0	-1,398	-2,968	-4,747	-6,385	-8,225
1.09	0	-1,480	-3,038	-4,742	-6,378	-8,140
1.11	0	-1,525	-3,095	-4,755	-6,469	-8,152
1.13	0	-1,622	-3,540	-5,276	-6,865	-8,890
1.15	0	-1,605	-3,542	-5,364	-7,160	-9,068
1.17	0	-1,610	-3,528	-5,480	-7,345	-9,242

A K_{jv}. 1-6666 – 1-2266 j. táblázatainak értékeiből számított lehajlások.



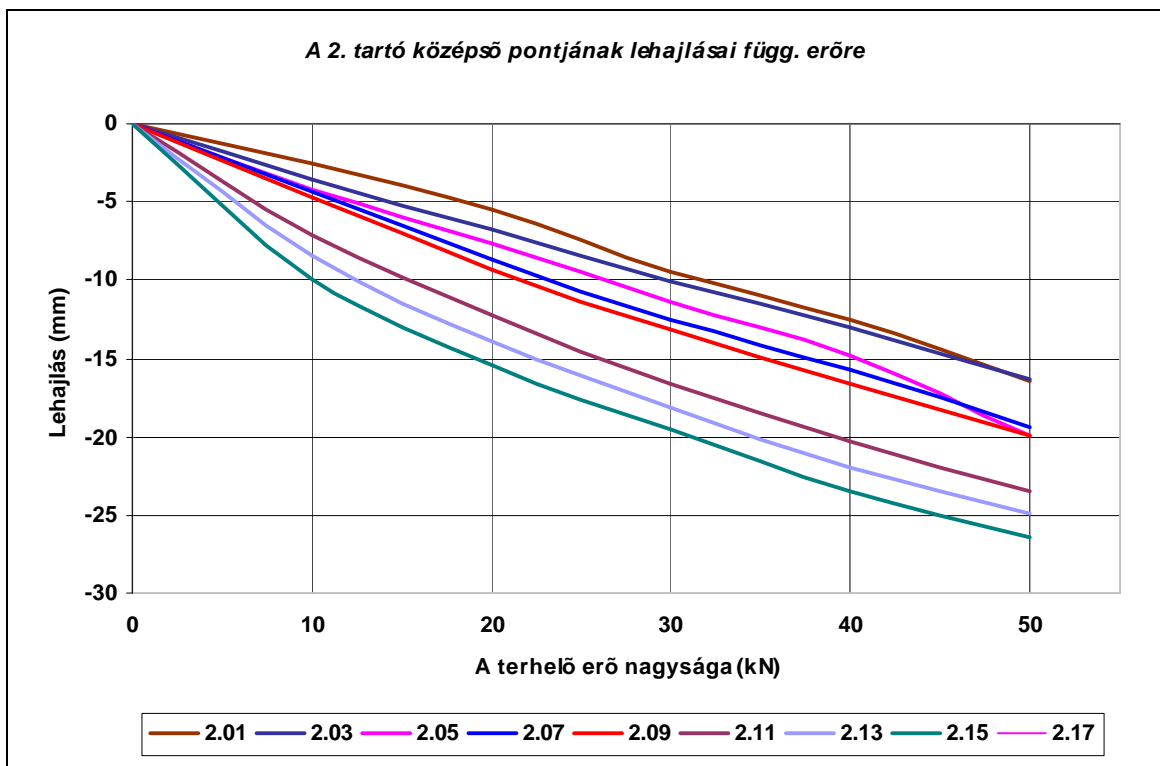
2. táblázat

- j. tartó középső – „ ... j. – pontjának lehajlásai (mm)



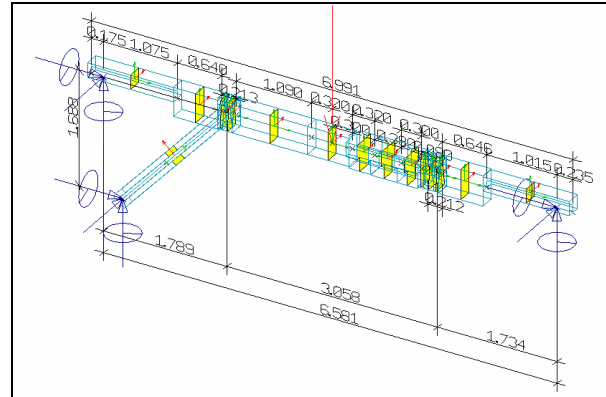
A tartó jele és állapota	Koncentrált függőleges. erő a középső pontban (kN)					
	0	10	20	30	40	50
2.01	0	-2,490	-5,480	-9,407	-12,546	-16,495
2.03	0	-3,538	-6,742	-10,102	-13,074	-16,372
2.05	0	-4,268	-7,712	-11,398	-14,801	-19,858
2.07	0	-4,332	-8,625	-12,491	-15,650	-19,428
2.09	0	-4,702	-9,305	-13,165	-16,638	-19,878
2.11	0	-5,785	-10,862	-14,702	-18,125	-21,040
2.13	0	-7,130	-12,262	-16,576	-20,302	-23,468
2.15	0	-8,418	-13,935	-18,135	-21,959	-24,918
2.17	0	-10,008	-15,420	-19,549	-23,491	-26,420

A K_{jv}. 2-6666 – 2-2266 j. táblázatainak értékeiből számított lehajlások.



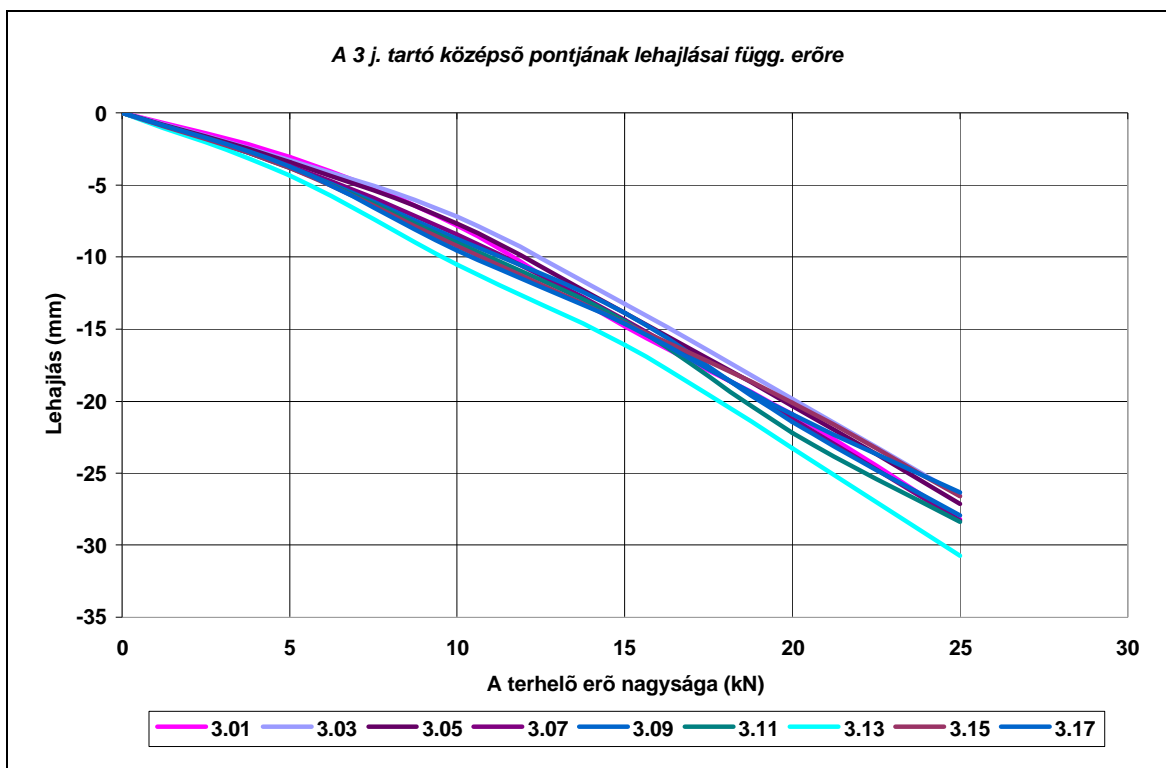
3. táblázat

3. j. tartó középső – „ ... j. – pontjának lehajlásai (mm)



A tartó jele és állapota	Koncentrált függőleges. erő a középső pontban (kN)					
	0	5	10	15	20	25
3.01	0	-3,055	-7,815	-14,822	-20,955	-28,202
3.03	0	-3,278	-7,195	-13,269	-19,829	-26,568
3.05	0	-3,402	-7,665	-13,875	-20,309	-27,128
3.09	0	-3,770	-8,738	-13,884	-21,458	-27,948
3.11	0	-3,812	-8,990	-14,481	-22,226	-28,412
3.13	0	-4,332	-10,498	-16,101	-23,310	-30,750
3.15	0	-3,805	-9,215	-14,594	-20,081	-26,602
3.07	0	-3,680	-8,430	-14,352	-21,258	-28,292
3.17	0	-3,720	-9,552	-14,660	-20,935	-26,368

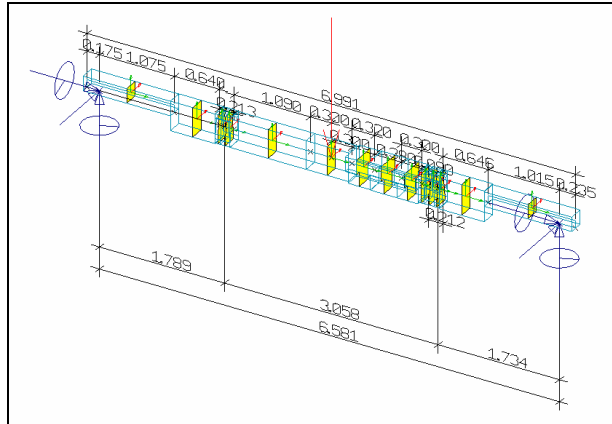
A K_{iv}. 3-6660 – 3-2260 j. táblázatainak értékeiből számított lehajlások.



4. táblázat

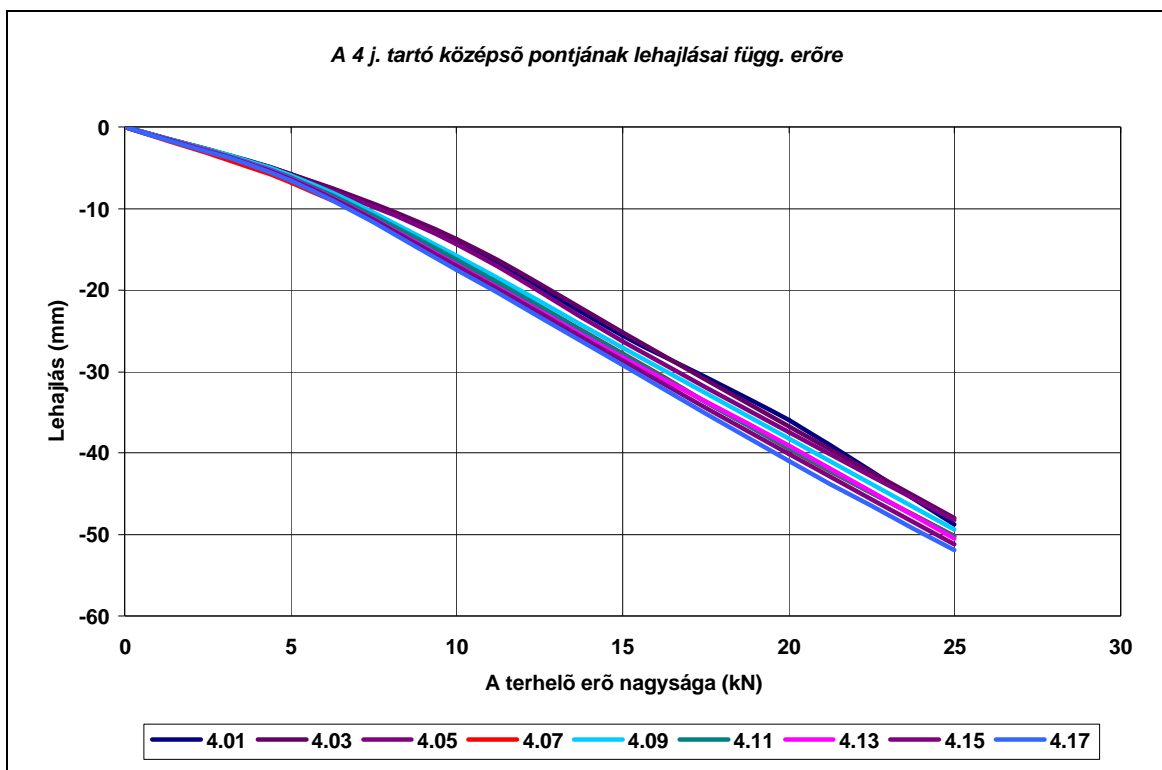
- j. tartó középső – „ ... j. – pontjának lehajlásai (mm)

Az 1988. évi DIN nem foglalkozik a teher jellegének hatásával, amikor a többfás tartók lehajlásainak számítását ismerteti. A német szabvány bevezeti a hatékony felületi másodrendű nyomaték fogalmát.



A tartó jele és állapota	Koncentrált függőleges. erő a középső pontban (kN)					
	0	5	10	15	20	25
4.01	0	-5,798	-14,098	-25,559	-35,965	-48,755
4.03	0	-5,828	-13,690	-25,145	-36,822	-48,030
4.05	0	-5,945	-14,390	-26,3125	-37,480	-48,235
4.07	0	-6,850	-16,470	-27,7783	-39,500	-50,185
4.09	0	-5,940	-15,735	-27,078	-38,248	-49,435
4.11	0	-6,180	-16,255	-27,814	-39,465	-50,250
4.13	0	-6,370	-16,880	-28,235	-39,120	-50,535
4.15	0	-6,435	-17,045	-28,605	-40,170	-51,200
4.17	0	-6,565	-17,475	-29,211	-41,008	-51,890

A K_{jv}. 4-6600 – 4-2200 j. táblázatainak értékeiből számított lehajlások.



3. TARTÓSZERKEZETEK DINAMIKAI VISELKEDÉSE

Valamely tartószerkezetre a rezgési folyamata jellemző. Azaz: a rezgés jellemzőinek ismeretében a szerkezet azonosítható. Amennyiben egy megépült szerkezet jellemzőit ismerjük, a rendszer dinamikailag leírható. Ha a dinamikai jellemzők változását az időben követjük, a változásokból a szerkezet módosulásaira, teher alatti viselkedésére következtetések vonhatók le. [VÉRTES György, 1976], [ILLÉSSY József, 1982], [FLESCHE, R. 1988], [EMERSON, N.R. és társai, 1998] Pontosan mérhető és egyértelmű változások a szerkezeti hibaanalízis céljára is alkalmasak [ILLÉSSY József, 1991], sőt a rendszeres mérések analízisének eredményeit a javításoknál is felhasználhatjuk. [ANDREY, D. – SUTER, R., 1986]

Egy rezgő test/szerkezet dinamikai megismerhetősége elvi kijelentés. A dinamikai leírásához a szerkezeti tulajdonságokat és az anyagjellemzőket ismernünk kell. A megismerés nyilván kísérletek segítségével is lehetséges, és az elméleti valamint kísérleti megállapítások közös felhasználása is alkalmas egy rendszer identifikálására. [PAPST, U., 1993]

3.1. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

A tartószerkezetek dinamikája elméletének bőséges irodalma van. A lenti - nagyon rövid és a továbbiak szempontjából célszerűen csoportosított - elméletet kimerítően a [TIMOSHENKO, S.-YOUNG, D.H. 1955], magyarul pedig a [BOSZNYAY Ádám, 1962] tartalmazza.

Építőmérnöki szempontból rendszerezett, gyakorlati tanácsokat és értékeket is tartalmaz a [KORENEV, B.G. – RABINOVİÉ, I.M., 1980] Oktatáshoz célszerű ismertetés a [WERNER, D., 1989], [VÉRTES György, 1976], [GYÖRGYI József, 2003]. Lényegre törő összefoglalást találunk a [KOLLÁR Lajos – MAJOR Sándor – KIRÁLY Béla, 1959], és a [VÉRTES György, 1984] könyvekben. A dinamika nem független a többi építőmérnöki tudománytól, sőt pl. a stabilitáselmélet matematikája csaknem azonos a tartószerkezetek dinamikájának matematikájával. Egyes tartószerkezetek elméleti statikai és dinamikai összefoglalóját tartalmazzák: [MAJOR Sándor, 1956], [SZMODITS Kázmér, 1972], [GOSCHY Béla, 1981], [SZABÓ János – ROLLER Béla, 1971].

A rezgések amplitúdóinak meghatározására szolgáló mozgásegyenletet vagy Newton második törvénye alapján az erők egyensúlyának felírásával, vagy a skaláris mennyiségek egyenlőségét megfogalmazó Hamilton-elv segítségével írhatjuk fel. Ezen utóbbi azon alapzik, hogy a $dt = t_2 - t_1$ időtartományban a dinamikai potenciál (az U potenciális energia és a T kinetikus energia különbsége) és a nemkonzervatív (pl. a disszipatív külső) erők W munkája variációjának összege zérus.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

Természetesen mind a vektoriális, mind a skaláris megközelítés azonos eredményre vezet. A továbbiakban az erők egyensúlyát kifejező Newton törvény alapján összefoglaljuk diszkrét modell alkalmazásával az egy-, a több - és a három szabadságfokú rendszerek mozgásegyenletét skalárisan ill. mátrixos aritmetikával.

3.1.1. Egyszabadságfokú diszkrét rendszer

Newton második törvényével a rezgő mozgás differenciálegyenlete felírható. Az általánosítás csorbítása nélkül egy db egyirányban elmozduló anyagi pont esetén, tehát egy szabadságfokú rendszerre a rezgőmozgás differenciálegyenlete a következő:

$$m \cdot \overset{gg}{w}(t) + d \cdot \overset{g}{w}(t) + k \cdot w(t) = 0, \text{ ahol}$$

- $w(t)$ az egyirányú, időtől függő elmozdulás [mm], amelynek sebessége $\overset{g}{w}(t)$ [mm/sec], gyorsulása pedig $\overset{gg}{w}(t)$ [mm/s²];
- m a pont tömege [to];
- d a csillapítást jellemző mennyiség [N·s/mm];
- k a pont elmozdulással szembeni ellenállását jelenti. (Rugóállandó: N/mm).

Ez a másodrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatójú egyenlet akkor érvényes, ha a pontra az egyensúlyi helyzetéből való kimozdítás után nem hat további erő, az autonom¹⁵ módon rezeg tovább, amíg újra egyensúlyba nem kerül.

A fenti egyenletben a tömegerő a mozgás gyorsulásával, a csillapító erő a mozgás sebességével¹⁶, a rugóerő a mozgása során megtett úttal/elmozdulással/kitéréssel egyenesen arányos.

A mérnöki elmélet (melyet persze a gyakorlat inspirál) kényszerűségből, célszerűségből, hatékonyságból a valóság érzékelhető csorbítása nélküli egyszerűsítésekre törekszik. A matematikai könnyítés szándékával vizsgáljuk meg azt, hogy mikor lehet a csillapítást figyelmen kívül hagyni! Célunk továbbra is a jelenségek valóságghű leírása!

A rezgő rendszerek mozgásai exponenciális függvénnyel írhatók le. Azaz: $w(t) = a \cdot e^{\lambda t}$. ($a \neq 0$ és $e^{\lambda t} > 0$, ugyanis a pont mozog, és a $t = \infty$ időpontot pedig nem vizsgáljuk.) Behelyettesítve ezen éteket az egyszabadságfokú rendszer mozgását leíró egyenletbe, majd azt egyszerűsítve, az $m \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + k = 0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk, ennek a $\lambda_{1,2}$ megoldásai sajátértékek, amelyekkel a szerkezetre jellemző karakterisztikus mozgásokat határozhatjuk meg.

$$\lambda_{1,2} = \frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Későbbi jelölések:

$$\kappa = \frac{d}{2 \cdot m} \text{ és } r = \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

¹⁵ Tehát a szerkezetre külső gerjesztő erő nem hat.

¹⁶ viszkózus csillapításnál

A négyzetgyök alatti kifejezés három esetet definiál:

1. $\left(\frac{d}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \rightarrow \lambda_{1,2} < 0$, **nagy csillapítás**, mivel a $w(t)=a_1 \cdot e^{\lambda t}$ az elmozdulás-függvény exponenciálisan csökkenő lesz, azaz a rezgés (mozgás) nagyon rövid kezdeti idő után megszűnik;
2. $\left(\frac{d}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ (azaz $d = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$, **kritikus csillapítás**) $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, a nagy csillapítás legkisebb értéke, mozgás ezen esetben sincs;
3. $\left(\frac{d}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, mindkettő komplex szám lesz. Ez a **kis csillapítású** rezgés. Mozgás van.

Vezessük be az $\omega_0^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$ kifejezést, így a gyök $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = i \cdot \omega_0^*$.

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

$$\lambda_1 = -\kappa + i\omega_0^* \text{ és } \lambda_2 = -\kappa - i\omega_0^*$$

ahol ω_0^* a csillapítatlan, ω_0 pedig a csillapított rezgőmozgás frekvenciája. Az utóbbiak egymásból meghatározhatók:

$$\omega_0^* = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{d^2}{4 \cdot k \cdot m}}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{d^2}{4 \cdot k \cdot m}} \quad 17$$

Csillapítás akkor is van, ha nincs külső rezgéscsillapítás. Ennek oka a kapcsolatoknál fellépő belső súrlódás, a **szerkezeti csillapítás**, valamint a anyag nem tökéletesen rugalmas volta miatti belső súrlódás, az **anyagi csillapítás**.

Arra keressük a választ, hogy mérnöki szerkezeteknél mikor nem kell figyelniük a csillapításra, azaz mikor fogadható el a $d = 0$ (ill. a $\underline{D} = \underline{0}$) kijelentés?

Az elmozdulások amplitúdóit a mozgásegyenletről tudjuk meghatározni, amely egyenlő két gyökhöz (λ_1 és λ_2) tartozó partikuláris megoldás lineáris kombinációjával, azaz a differenciálegyenlet általános megoldásával (a d_1 és d_2 együtthatók egymás komplex konjugáltjai, az exponenciális függvény is komplex, így a mozgásfüggvény valós lesz):

$$w(t) = e^{-\kappa t} \left(d_1 e^{i\omega_0^* t} + d_2 e^{-i\omega_0^* t} \right)$$

¹⁷ Az egyszabadságfokú csillapítatlan szabadrezgés egyenlete, karakterisztikus egyenlete, gyökei és körfrekvenciája:

$$m \cdot \overset{gg}{w}(t) + k \cdot w(t) = 0 \qquad m \cdot \lambda^2 + k = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -i\omega_0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Figyelembe véve az Euler-féle összefüggéseket ($e^{i\omega_0^*t} = \cos \omega_0^*t + i \sin \omega_0^*t$ és $e^{-i\omega_0^*t} = \cos \omega_0^*t - i \sin \omega_0^*t$) a mozgásfüggvényt az alábbi kifejezés írja le:

$$w(t) = e^{-\rho t} \left[(c_2 + c_3) \cos \omega_0^*t + i(c_2 - c_3) \sin \omega_0^*t \right]$$

További átalakításokkal – $A=c_2+c_3$ és $B=i(c_2-c_3)$ – a csillapított rezgések elmozdulásait a $w(t) = e^{-\rho t} (A \cos \omega_0^*t + B \sin \omega_0^*t)$ egyenletből számíthatjuk.

A és **B** a kezdeti feltételekből meghatározhatók. Ha a $t = 0$ időpillanatban a kitérés w_0 , és ennek a sebessége ugyanakkor v_0 , akkor az elmozdulásokat meghatározó összefüggés:

$$w(t) = e^{-\rho t} \left(w_0 \cos \omega_0^*t + \frac{v_0 + \kappa \cdot w_0}{\omega_0^*} \sin \omega_0^*t \right) \quad 18$$

Tehát a rezgési elmozdulások periodikusan változnak, a kitérések és az elmozdulások sebessége T_0^* idő eltelte után ismétlődik:

$$\sin \omega_0^*t = \sin \omega_0^*(t + T_0^*) \quad \text{és} \quad \cos \omega_0^*t = \cos \omega_0^*(t + T_0^*) .$$

A fenti egyenlőségek teljesülnek, ha $\omega_0^* T_0^* = 2\pi$, azaz a T_0^* rezgésidő és az f_0^* rezgésszám

$$(\text{az időegység alatt végzett rezgések száma}): T_0^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*} \quad f_0^* = \frac{1}{T_0^*} = \frac{\omega_0^*}{2\pi} .$$

Mint láttuk, a csillapított és a csillapítatlan rezgések önrezgésszáma egymásból meghatározható. – Hogyan jellemezzük a csillapítást?

Az elmozdulásokat leíró egyenletben a görbe változását egy negatív kitevőjű exponenciális függvény határozza meg, azaz a kitérések az idő múlásával csökkennek. Az adott rezgéshez tartozó T_0 periódusidő állandó, így az egymást követő kitérések hányadosa konstans. Ezen hányadosokat nevezzük a csillapított rezgés dekrementumának, ennek természetes alapú logaritmusát pedig logaritmikus dekrementumnak (J). Ezen utóbbi jellemző a

csillapítás nagyságára. A két kitérés hányadosa $\frac{w(t)}{w(t + T_0^*)} = e^{\kappa T_0^*}$ és ennek logaritmusa:

$$J = \ln \frac{w(t)}{w(t + T_0^*)} = \kappa T_0^*$$

A differenciálegyenletben szereplő d csillapítási tényezőt fejezzük ki a J logaritmikus dekrementum segítségével!

¹⁸ Ha rendszer csillapított, akkor $d=0 \rightarrow \rho=0$, és $\omega_0^* \rightarrow \omega_0$. A rezgésalak függvénye:

$$w(t) = w_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

A mérnöki gyakorlatban szokásos, hogy az aránylag könnyen meghatározható J -ből u.n. ekvivalens külső csillapítási tényezőt számolunk ki. Így a szerkezeti csillapítás kifejezhető külső csillapítás nélkül is. (Alacsony dinamikus feszültség esetén pedig az anyagi csillapítás a frekvenciától független állandó értéknek tekinthető – kísérletek szerint. [FLESCH,R. 1980] Így ezt is az ekvivalens csillapítási tényezőbe érthetjük bele.

$$\vartheta = \rho \cdot T_0^* = \kappa \cdot \frac{2\pi}{\omega_0^*} = \frac{d}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}} = \frac{d \cdot \pi}{\sqrt{m \cdot k - \frac{d^2}{4}}}$$

Négyzetre emelve és a d_{ekv} értéket kifejezve gyökvonás után:

$$d_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{4 \cdot m \cdot k \cdot \vartheta^2}{4\pi^2 + \vartheta^2}}$$

Mivel a ϑ^2 értéke 0,1 és 0,01 között van a gyakorlati esetekben (l. pl. [CANTIENI, R. 1983]), sokkal kisebb, mint a $4\pi^2$, ezért elhanyagolható. Így képletünk egyszerűsödik:

$$d_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{4 \cdot m \cdot k \cdot \vartheta^2}{4\pi^2}}$$

Kiemelés és a $v = \vartheta/\pi$ jelölés bevezetése után $d_{\text{ekv}} = v\sqrt{k \cdot m}$ alakú lesz. Azaz a csillapított és a csillapítatlan körfrekvenciák közötti összefüggésbe behelyettesítve az ekvivalens csillapítást, megállapítható, hogy a két körfrekvencia közötti különbséget csak a logaritmus

dekrementum befolyásolja: $\omega_0^* = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{4}}$. Mivel a logaritmus dekrementum nagyon

kicsi 1 - nél kisebb szám, négyzetének negyede nem befolyásolja a csillapítatlan körfrekvenciát (max. 1-2 századdal), így ezek a gyakorlatban egyenlőnek fogadhatók el. A kettő közötti különbség gyakorlatilag nulla. Ez a (csillapítás nélkül) számított és a mért frekven-

ciakülönbség megítélésénél lényeges. **Azaz ha az eltérés $\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}}$ - nél nem nagyobb,**

akkor a két érték azonosnak vehető, így a csillapítás figyelembe vétele nélkül számított, és a mért frekvenciák századokban jelentkező eltéréseiből következtetés nem vonható le! A fenti szám a figyelembe nem vehető különbség alsó határa.

De valószínű, hogy ekkora változást a külső körülmények módosulása is jelent. Így ez a megállapítás azt is valószínűsíti, hogy két mérés eredményeinek különbségét mikor lehet jellemzőnek tekinteni, hiszen a két vizsgálat közötti időszakban a pontosan meghatározhatatlan szerkezeti csillapítás változ(hat)ott, nem beszélve a tömegek és merevségek szintén követhetetlen módosulásáról.

3.1.2. Többszabadságfokú diszkrét rendszerek

Egy szerkezet végtelen sok egymáshoz kapcsolt pontból áll, és egy pont mozgását nem feltétlenül egy paraméter jellemzi. (Térbeli mozgás.) Azaz a szerkezetek több szabadságfokú rendszerként írhatók csak le. Esetünkben véges számú pont *egyirányú* mozgását figyeljük, azaz a szabadságfok megegyezik a pontok számával.

Ezen rendszerre pontonként felírható a rezgés differenciálegyenlete, ezen egyenletek a pontok egymásra gyakorolt hatását is tartalmazó egyenletrendszert alkotnak, amely legegyszerűbben a mátrix aritmetikával írható fel:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\dot{w}}}(t) + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\dot{w}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{w}}(t) = \underline{\underline{0}}$$

Itt $\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, $\underline{\underline{D}}$ a csillapítási mátrix, $\underline{\underline{K}}$ pedig az egyes pontok kölcsönhatását is tartalmazó, az elmozdulással szembeni ellenállást kifejező merevségi mátrix. Mivel a mérnöki szerkezetek gyengén csillapítottak, ezért feltételezhetjük, hogy a $\underline{\underline{D}}$ mátrix zérus, így az egyenletrendszerünk a következő:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\dot{w}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{w}}(t) = \underline{\underline{0}} \quad 1/$$

A csillapítatlan rendszerre vonatkozó állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldását keressük a $\underline{\underline{w}}(t) = C \cdot \underline{\underline{v}} \cdot e^{i\omega_0 t}$ alakban! (C komplex szám). A

függvény deriváltjai: $\underline{\underline{\dot{w}}}(t) = i \cdot \omega_0 \cdot C \cdot \underline{\underline{v}} \cdot e^{i\omega_0 t}$ és $\underline{\underline{\ddot{w}}}(t) = -1 \cdot \omega_0^2 \cdot C \cdot \underline{\underline{v}} \cdot e^{i\omega_0 t}$

A fenti értékeket behelyettesítve, és osztva a $C \cdot \underline{\underline{v}} \cdot e^{i\omega_0 t}$ kifejezéssel, általánosított sajátértékfeladatot kapunk: $(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \cdot \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}}$. A $(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \cdot \underline{\underline{M}})$ mátrix a $\underline{\underline{K}}$ és az $\underline{\underline{M}}$ mátrixpár általánosított karakterisztikus mátrixa. A homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az általánosított karakterisztikus mátrix determinánsa zérus, azaz: $|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \cdot \underline{\underline{M}}| = 0$. A determinánst kifejtve az egyenletből n-edrendű mátrixok esetén n-edfokú karakterisztikus egyenletet kapunk, amelynek n számú megoldása van (ω_{0r}^2 , $r = 1, \dots, n$). Az ω_{0r} számok a rendszer sajátértékei, és mindegyikhez tartozik egy $\underline{\underline{v}}_r$ sajátvektor. Ezek felhasználhatók a homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak meghatározására.

Ha a $\underline{\underline{w}}(t)$ elmozdulásfüggvényt az általánosított karakterisztikus mátrix sajátvektorainak bázisán¹⁹ határozzuk meg, akkor végezzük a **modálanalízist**.

¹⁹ A kezdeti eltolódások vektora legyen az egyik sajátvektor: $\underline{\underline{w}}_0 = \underline{\underline{v}}_s$ és $\underline{\underline{\dot{w}}}_0 = \underline{\underline{0}}$.

A csillapítatlan rezgés esetén (továbbra is harmonikus rezgést feltételezve) az i -edik tömegpont mozgásait leíró $w_i(t) = A_i \cos \omega_0 t + B_i \sin \omega_0 t$ egyenlet az ismeretlen állandók célszerű megválasztásával ($C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ és $\varphi = \arctg \frac{A_i}{B_i}$) a következő: $w_i(t) = C_i \sin(\omega_0 t + \varphi)$

A rezgésegyenletet az irodalomjegyzékben felsorolt dinamika tárgyú könyvek a gyakorlat számára is használható módon annak figyelembevételével oldják meg, hogy az egyenletben szereplő \underline{K} merevségi mátrix (általános esetben a \underline{D} csillapítási mátrix is) pozitív definit és valós (valós elemű) mátrix. A \underline{K} merevségi mátrix rugalmas rendszerek esetében a Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel miatt szimmetrikus is. Ha valós és szimmetrikus, akkor azonos transzponált konjugáltjával, azaz hermitikus. A matematikailag egyszerű (egyszerűen követhető) megoldások ezen körülményt ki is használják!

A fentiek előrebocsátásával határozzuk meg a többszabadságfokú diszkrét rendszerek mozgásegyenletét! [RÓZSA Pál, 1974], [KORN, G.A – KORN, T.M., 1975], [VÉRTES György, 1976], [GYÖRGYI József, 2003].

A kísérlettel meghatározott (és esetleg számítással pótoltt) adatok alapján is azonosítható (identifikálható) egy rendszer. Ennek is bőséges irodalma van. Pl.: [NATKE, H.G., 1968, 1971, 1982a, 1982b, 1984], [WALLASCHEK, J.1992]. A differenciálegyenlet általános megoldásából ezen identifikálás lehetőségei is kiolvashatók.

Határozzuk meg diszkrét modellen egy n szabadságfokú rendszer rezgésegyenletét a sajátvektorok alkalmazásával!

A $|\underline{K} - \omega_0^2 \cdot \underline{M}| = 0$ n -edrendű karakterisztikus egyenletből az összes sajátérték, azaz a rendszer n db. saját körfrekvenciája meghatározható. Minden sajátértékhez tartozik egy \underline{v}_r sajátvektor, amely a sajátértékek ismeretében meghatározható a \underline{K} és az \underline{M} mátrixpár általánosított karakterisztikus mátrixának és az ω_{0r}^2 sajátértékhez tartozó \underline{v}_r sajátvektornak szorzatából: $(\underline{K} - \omega_0^2 \cdot \underline{M}) \cdot \underline{v} = \underline{0}$. Amennyiben az $n \times n$ méretű karakterisztikus mátrix \mathbf{r} rangja²⁰ n -nél kisebb, akkor az előbbi lineáris egyenletrendszer csak úgy oldható meg, ha $n - \mathbf{r}$ számú szabad ismeretlent tételezünk fel. Értéküket célszerűen 1-nek választva!

A $(\underline{K} - \omega_0^2 \cdot \underline{M}) \cdot \underline{v} = \underline{0}$ általánosított sajátértékfeladat két különböző megoldását, a \underline{v}_p és \underline{v}_q sajátértékeket ($p \neq q$) helyettesítsük be az egyenletbe!

$$\underline{K} \underline{v}_p = \omega_{0p}^2 \underline{M} \underline{v}_q \quad \underline{K} \underline{v}_q = \omega_{0q}^2 \underline{M} \underline{v}_p \quad 2/$$

²⁰ A mátrix rangja: a mátrix statikailag független oszlopainak vagy sorainak száma.

Az egyenletek megfelelő átalakításával (a baloldalak legyenek egyenlők), majd egymásból való kivonásával kapjuk, hogy $0 = (\omega_{0p}^2 - \omega_{0q}^2) \cdot \underline{v}_p^* \cdot \underline{M} \cdot \underline{v}_q$. Mivel $\omega_{0p}^2 \neq \omega_{0q}^2$, az egyenlet

csak akkor lehet igaz, ha $\underline{v}_p^* \cdot \underline{M} \cdot \underline{v}_q = 0$.²¹

Tehát a különböző sajátvektorok a tömegmátrixra ortogonálisak. Ha a sajátvektorok behelyettesítése után kapott egyenleteket úgy rendezzük át, hogy a jobb oldalak legyenek egyenlők, és így vonjuk ki őket egymásból, akkor azon eredményre jutunk, hogy a különböző sa-

játvektorok a merevségi mátrixra is ortogonálisak. Ugyanis, ha $\left(\frac{1}{\omega_{0p}^2} - \frac{1}{\omega_{0q}^2} \right) \cdot \underline{v}_p^* \cdot \underline{K} \cdot \underline{v}_q = 0$,

és $\omega_{0p}^2 \neq \omega_{0q}^2$, ez csak akkor lehetséges, ha $\underline{v}_p^* \cdot \underline{K} \cdot \underline{v}_q = 0$. Szorozzuk meg most a 2/ egyenleteket a sajátvektor transzponáltjával, és a normáljuk a sajátvektorokat úgy, hogy a $\underline{v}_q^* \cdot \underline{M} \cdot \underline{v}_q$ ill. a $\underline{v}_p^* \cdot \underline{M} \cdot \underline{v}_p$ szorzat egységnyi legyen! (A továbbiakban tehát a merevségi mátrixra ortogonális, a tömegmátrixra pedig ortonormált sajátérték-alakokkal dolgozunk.)

$$\underline{v}_q^* \cdot \underline{M} \cdot \underline{v}_q = \omega_{0q}^2$$

Ha az összes sajátvektort összefoglaljuk az \underline{S} vektorban, akkor az általánosított sajátértékfeladat elemei között az alábbi összefoglaló összefüggéseket kapjuk (\underline{E} az egységmátrix, a sajátértékek mátrixa pedig diagonális):

$$\underline{S}^* \cdot \underline{M} \cdot \underline{S} = \underline{E} \quad \underline{S}^* \cdot \underline{K} \cdot \underline{S} = \langle \omega_{01}^2, \omega_{0p}^2, \omega_{0q}^2, \omega_{0r}^2, \dots, \omega_{0n}^2 \rangle \quad 3/$$

A tömegmátrixra ortonormált sajátvektorok és a \underline{K} és \underline{M} mátrixpár sajátértékeinek ismeretében határozzuk meg a rendszer rezgésalakját, azaz az 1/ egyenlet $\underline{w}(t)$ függvényét! Keressük ezen függvényt a $\underline{w}(t) = \underline{S} \cdot \underline{z}(t)$ alakban! Ezen alakot az 1/ differenciálegyenletbe helyettesítjük, és megszorozzuk az egyenletet balról az \underline{S} mátrix \underline{S}^* transzponáltjával, azaz:

$$\underline{S}^* \underline{M} \underline{S} \cdot \underline{z}''(t) + \underline{S}^* \underline{K} \cdot \underline{z}(t) = \underline{0}$$

A 3/ alatti összefüggések figyelembevételével az n-edrendű mátrixdifferenciálegyenlet n db egyszabadság fokú mozgásnak megfelelő differenciál-

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{01}^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega_{0r}^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_{0n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \underline{0}$$

egyenletre esik szét.

$$\begin{aligned} z_r''(t) + \omega_{0r}^2 z_r(t) &= 0, \\ r &= 0 \dots n \end{aligned}$$

²¹ *: transzponált mátrix

A korábban felírt elmozdulási összefüggés alapján a rezgésalak meghatározása egy tömeg-

pontra:

$$z(t) = z_0 \cos \omega_0 t + \frac{z_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

A z_0 és a \dot{z}_0 kezdeti feltételeket felírjuk az eredeti ismeretlennel [$\underline{z}(t) = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{w}(t)$], a partikuláris megoldások lineáris kombinációjaként megkapjuk a rezgésalak egyenletét:

$$\underline{w}(t) = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \cdot \underline{v}_r^* \cdot \underline{M} \cdot \left[\underline{w}_0 \cdot \cos(\omega_{0r} \cdot t) + \frac{1}{\omega_{0r}} \dot{\underline{w}}_0 \cdot \sin(\omega_{0r} \cdot t) \right] \quad 4/$$

3.1.3. A három szabadságfokú rezgő rendszer sajátfrekvenciáinak és módusainak számítása diszkrét modell segítségével

A fentiekben ismertett problémamegoldást fordítsuk le a KJv.-ben rögzített egyszerű fagtartó vizsgálatára. (Statikailag határozott, kéttámaszú, középső szakaszán kétfás gerendatartó) A disszertációban **csak a kéttámaszú gerendával** foglalkozunk (4.01-4.18. sz. mérések), de ezen kívül még három szerkezeten végeztük el a méréseket.²²

A szerkezetet kalapácsütéssel gerjesztettük, és több helyen mértük az idő-rezgésgyorsulás válaszfüggvényét. A kéttámaszú gerendát hat állapotban mértük. (Az állapotot az alsó és felső gerendákat összeszorító csavarok és a csuklóban bekövetkező elfordulást befolyásoló csavarok meghúzásának mértéke határozza meg.) Ezek elnevezése/jele:

4-6600, 4-6400, 4-6200, 4-4600, 4-4400, 4-4200, 4-2600, 4-2400, 4-2200.

Emiatt először a statikus adatokkal kell foglalkoznunk, azaz elő kell állítanunk a gerenda gyakorlat számára pontos statikai vázát, amelyen a számított lehajlások a mért értékekkel összhangban vannak.

Majd foglalkozunk a dinamikai számítással, **három szabadságfokú diszkrét modellen**. (A gerenda saját tömegét a \mathcal{f} , a_n ... és a \dagger j. közbenső pontokban koncentráltuk, és megmértük a gerendák ezen keresztmetszeteinek függőleges elmozdulását.)

Feladatunk, hogy három szabadságfokú diszkrét modell esetén határozzuk meg a szerkezet sajátlengésszámait²³ (\mathbf{f}_i), a sajátalakokat ($\underline{\mathbf{v}}$), valamint írjuk fel az $\underline{\mathbf{w}}(t)$ függvényét! (Mivel $n = 3$, ennyi sajátértéket, azaz sajátlengésszámot és saját-lengésalakot tudunk kiszámítani.)

Először meg kell határozunk a $\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{w}}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{w}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ mátrixegyenlet 3x3 méretű $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ mátrixát. Majd a $|\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \omega_0^2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}| = 0$ karakterisztikus egyenletből a három sajátérték és a há-

²² A megmért adatokat számított értékekkel szeretnénk összehasonlítani, és a számításhoz szükséges adatok egy részét mérési eredmények biztosítják.

²³ Az építőmérnöki szerkezetek alaprezgésszáma kicsi. Ezért szokás a frekvenciát lengésszámmal is nevezni.

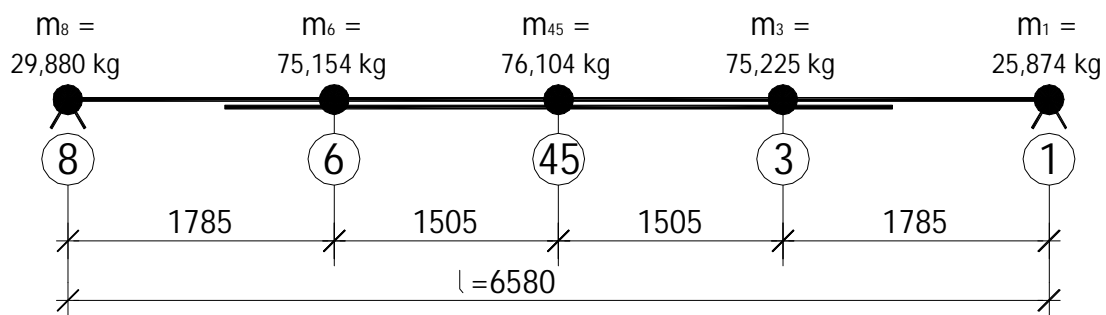
rom sajátlengésszám ($f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$) meghatározható. Utána a $(\underline{K} - \omega^2 \cdot \underline{M}) \cdot \underline{v} = \underline{0}$ egyenletből a korábban leírtak alapján a sajátmódusokat kell kiszámítani. Végül – harmonikus lengést feltevézve – lineáris kombinációval felírható a 4/ lengésegyenlet. Kezdeti feltételek: a $t = 0$ pillanatban mozgás nincs, így az elmozdulás valamint ennek sebessége is 0.

3.2. A LABORTARTÓK DINAMIKAI SZÁMÍTÁSAI

3.2.1. Az \underline{M} tömegmátrix számítása

A Melléklet 1.2.3. pontja szerint a gerenda anyagának fajlagos testsűrűsége $u \approx 12\%$ nedvességtartalmú helyiségben egy év természetes száradás után, 3-4 hónappal a mérések előtt $\rho = 588 \text{ kg/m}^3$ volt. Ennek alapján a gerenda teljes tömege 280 kg, és az egyes közbenső pontok tömege a Melléklet 1.4.1. és 1.4.3. pontjai alapján (2. ábra):

$$75,225 + 76,104 + 75,154 \text{ kg}$$



2. ábra

A kéttámaszú gerenda dinamikai modellje

Így az \underline{M} tömegmátrix (tonna):

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_6 & 0 & 0 \\ 0 & M_{45} & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.075225 & 0 & 0 \\ 0 & 0.076104 & 0 \\ 0 & 0 & 0.075154 \end{bmatrix}$$

3.2.2. A \underline{H} hajlékonysági vagy a \underline{K} merevségi mátrix számítása

3.2.2.1. A sajátvektorok ismeretében

A merevségi mátrix dinamikai számítással való meghatározásához a mért válaszfüggvényeket (pontonkénti rezgésyorsulások az idő függvényében) kell felhasználnunk. A válaszfüggvényekből meghatározhatók a sajátlengésszámok, felrajzolhatók és megadhatók az egyes ω_i értékek négyzetéhez tartozó módusok (pl. Fourier analízissel). Így a sajátvektoroknak a \underline{K} merevségi mátrixra való ortogonalitását kifejező egyenlet –

$\underline{\underline{S}}^* \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{S}} = \langle \omega_{01}^2, \omega_{0p}^2, \omega_{0q}^2, \omega_{0r}^2, \omega_{0n}^2 \rangle$ – a $\underline{\underline{K}}$ mátrixra közvetve megoldható lesz. Ugyanis n darab lineáris egyenletet írunk fel, amelyekben ismeretlenként szerepelnek a merevségi mátrix elemei. Majd ezen ismeretlenekre megoldjuk a lineáris egyenletrendszer. (Amelynek együtthatómátrixa felírható mátrix alakban, így a megoldás talán egyszerűbb.) Tehát összesen n db. ismeretlent tudunk meghatározni. Az $n \times n$ típusú kvadratikusan és szimmetrikusan mátrixok esetében az egymástól különböző elemek száma $\frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Tehát az ismeretlenek száma $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ -vel több, mint amennyit egyértelműen meg tudunk határozni. Azaz a merevségi mátrix $\frac{n-1}{2}$ oszlopát ismernünk kell. (Számításból vagy mérésből.) A megoldás ez esetben is csak akkor egyértelmű, ha n páratlan. (Pl. esetünkben, három tömegpont esetén, egy oszlop adatait kell a megoldáshoz tudnunk.) Különben a lineáris egyenletrendszer határozatlan vagy túlhatározott lesz.

A $\underline{\underline{K}}$ ismeretében az egyes tömegpontokban a külső terhekből keletkező elmozdulások számíthatók lesznek a statikai váz ismerete nélkül.

3.2.2.2. A sajátvektorok ismerete nélkül

Tisztán statikus módszer az, hogy a statikus mérésekből részlegesen megismert hajlékonysági mátrix hiányzó elemeit számításal pótoljuk. A mérési eredmények alapján meghatározunk egy olyan statikai vázat, amelyen a számított és a mért lehajlások a lehető legpontosabban megegyeznek. Majd ezen statikai vázon tovább számolva pótoljuk a hajlékonysági mátrix hiányzó elemeit. Ezután a $\underline{\underline{K}}$ és az $\underline{\underline{M}}$ ismeretében a rendszer dinamikai jellemzői meghatározhatók. (2.1.2.pont)

A koncentrált tömegek keresztmetszeteiben (2.ábra) mértük az e_{12} , e_{22} , e_{23} lehajlásokat különböző nagyságú, középen elhelyezett F koncentrált erő hatására. Tehát adottak a 3×3 nagyságú hajlékonysági mátrix középső oszlopának elemei a KJv.-ben lévő 4-6600 – 4-2200 j. táblázatokban. (A táblázatok értékei a Mellékletben **mm** - ben vannak.) A rugalmas viselkedést feltételezve a lehajlási értékeket egységére is meghatároztuk. Ezen számok a hajlékonysági mátrix középső oszlopának értékei.

A hajlékonysági mátrix első és harmadik oszlopának kiszámításához meg kell határozni a tartó statikai vázát (5. fejezet). – A hajlékonysági mátrixból a merevségi mátrixot matematikai úton kaphatjuk: $\underline{\underline{H}}^{-1} = \underline{\underline{K}}$.

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^*$$

$$e_{ij} = e_{ji} \\ \text{azaz} \\ e_{21}=e_{12}, e_{31}=e_{13}, e_{23}=e_{32}$$

Ismeretlen lehajlások: a \uparrow j. pontban ható egységérő hatására a \uparrow , „ ..., \mathcal{F} , pontok lehajlása (e_{11}, e_{21} és e_{31}), valamint a \mathcal{F} j pontban működő egységérő hatására a \uparrow , „ ..., \mathcal{F} pontok lehajlása (e_{13}, e_{23} és e_{33}). Ha az e_{11}, e_{13} és az e_{33} lehajlásokat kiszámítjuk, akkor a hajlékonysági mátrix minden eleme ismertté válik. Célszerű az e_{31} értékeket a számítás ellenőrzéseként, az e_{21} és e_{23} lehajlásokat pedig a számított és a mért adatok összevetése céljából kiszámítani.

4. ÖSSZETETT KERESZTMETSZETŰ TARTÓK

A hajlított-nyírt részben kétfás tartó statikai váza felírásához tekintsünk át néhány hasonló tartó megoldását. (A vizsgált tartó gerendája kétfás kialakítású. A két gerendát átmenő csavarok kötik össze, így fa-fa öszvérhatással kell számolnunk. Azaz a két gerenda egymáson nem szabadon, hanem kötőelemmel gátolt módon mozdul el, hiszen a kapcsolat az elcsúszást akadályozza. Meghatározandó a csatlakozási hézagban keletkező $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ csúsztatóerő az alábbi alapesetekben:

- hevederlemezzel erősített hengerelt szelvényű acélgerenda;
- kétfás fagerenda;
- acél-vasbeton öszvértartó.

A gerendákban keletkező csúsztatóerő meghatározásánál elsősorban az alábbi szakirodalmra támaszkodtunk:

- [STÜSSI, Fritz – DUBAS, Pierre, 1971.] és [STÜSSI, Fritz, 1971].
- [PISCHL, R., 1968 és 1969.]
- [RÓNAI Ferenc – SOMFALVI György, 1982.]

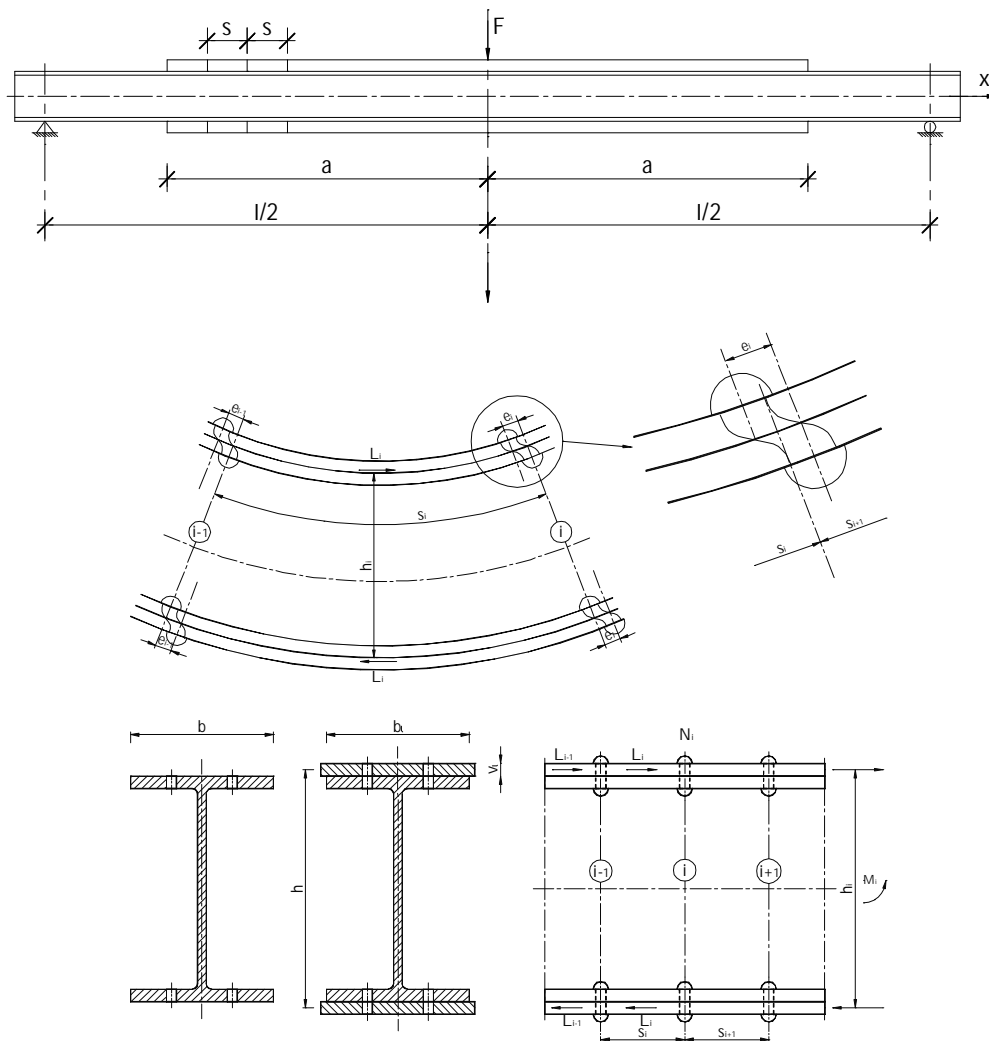
A csúsztatóerő ismeretében a többi igénybevétel meghatározható. Most a tartók lehajlásait határozzuk meg. Ehhez szükséges az igénybevételek ismerete, a tartók tengelye mentén felírt függvény vagy felrajzolt ábra formájában.

A lenti vizsgálatokból ismertté válik az öszvértartókat leíró differenciálegyenlet alkotórészeinek jelentésével és eredetével együtt. Ezt az egyenletet alkalmazhatjuk majd a szóban forgó vizsgált tartó egyenletének meghatározásához. Ismeretében a megfelelő kerületi feltételek kiválasztásával a laboratóriumi gerendatartó egyenlete felírható lesz, és meghatározhatjuk a hajlékonysági mátrix nem megmért elemeit.

4.1. SZEGECSELT (CSAVAROZOTT) HEVEDERLEMEZZEL ERŐSÍTETT HENGERELT SZELVÉNYŰ ACÉLGERENDA²⁴

A szegecsekre ható $N_i = L_{i-1} - L_i$ erő csökkenti az M_i külső nyomatékot az $M_{0i} = M_i - L_i \cdot h_i$ értékre. A külső nyomaték az s_i szakaszon a könnyebb megoldhatóság érdekében legyen állandó, értéke a szakasz nyomatékainak átlaga. Jelölése M_{im} , ill. M_{oim} .

A szakaszon meghatározható görbület: $\frac{1}{\rho_i} = \frac{M_{0i}}{E \times I_0}$. A jelenség alapegyenletét abból a feltételből vezetjük le, hogy az övlemez hajlításból és a szegecsek deformációjából számítható rövidülése/nyúlása (Δs_{i0i}) megegyezik a hevederlemezben keletkező L_i normálerőből számítható rövidüléssel/nyúlással (Δs_{ih}). Jelölések a 3. ábra szerint:



3. ábra

A szegecselt és kétoldalon hevederlemezzel erősített tartó összetett keresztmetszete.

²⁴ Ezt a megerősítést már nem alkalmazzák, de elméletileg alapeset, így elvek bemutatására kiválóan alkalmas.

Az övlemez és a hevederlemez alakváltozása és a tartó magassága állandó, azaz $h_i = h$:

$$\Delta S_{i0l} = \frac{M_{0im}}{EI_0} \times \frac{h}{2} S_i - e_{i-1} + e_i = \frac{M_{im} - L_i \times h}{EI_0} \times \frac{h}{2} S_i - e_{i-1} + e_i \quad \text{és} \quad \Delta S_{ihl} = \frac{L_i}{EA_{hl}} \times S_i$$

A két alakváltozás azonos (a hevederlemez keresztmetszeti területe: $A_{hl} = b_l \cdot v_l$)

$$\frac{M_{im} - L_i \times h}{EI_0} \times \frac{h}{2} S_i - e_{i-1} + e_i = \frac{L_i}{EA_{hl}} \times S_i$$

A szegecsek deformációja miatti elmozdulások (C_i az egyes, i -edik oszlopokban lévő szegecsekre jellemző, a deformációval szembeni ellenállás, N/mm).

Amennyiben folytonos ellenállást veszünk figyelembe: a $K = C_i/s_i$, érték az elcsúszási ellenállás, dimenziója N/mm².

$$e_i = \frac{N_i}{C_i} = \frac{L_{i+1} - L_i}{C_i} \quad e_{i-1} = \frac{N_{i-1}}{C_{i-1}} = \frac{L_i - L_{i-1}}{C_{i-1}}$$

Az összetett keresztmetszet tehetetlensége (a hevederlemez saját inerciáját elhanyagoljuk):

$$I_1 = I_0 + A_{hl} \times \frac{h_i^2}{2} \times 2 = I_0 + A_{hl} \frac{h_i^2}{2}$$

Tételezzük fel, hogy az összes szegecs azonos tulajdonságú, azaz $C_i = C = \text{konstans}$ és a csúsztatóerő is folytonosan megoszló. Jelölése legyen: $\mathbf{T(x)}$. A szegecsek tartótengely - menti távolsága azonos, azaz $s_i = s$.

$$L_{i-1} - \left(2 + \frac{C s_i}{EA_h} + \frac{C h^2 s_i}{2EI_0}\right) L_i + L_{i+1} = - \frac{C h}{2EI_0} M_{im}$$

$$\frac{C s_i}{EA_h} + \frac{C h^2 s_i}{2EI_0} = \frac{C s_i}{EA_h} \left(1 + \frac{A_h h^2}{2I_0}\right) = \frac{C s_i}{EA_h I_0} \left(I_0 + A_h \frac{h^2}{2}\right) = \frac{C s_i}{EA_h} \frac{I_1}{I_0}$$

Osszuk el az egyenletet az azonos szegecstávolsággal:

$$\frac{L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1}}{s^2} - \frac{C}{s \times E} \times \frac{I_1}{I_0 \times A_h} L_i + \frac{C}{s \times E} \times \frac{h}{2I_0} M_{im} = 0$$

A második differencia azonos osztástávolságok (s) esetén és más jelölések:

$$\frac{d^2 L(x)}{dx^2} \gg \frac{L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1}}{s^2}; \quad \omega^2 = \frac{K}{E} \times \frac{I_1}{I_0 \times A_h} \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{K}{E} \times \frac{h}{2I_0}; \quad \frac{\alpha}{\omega^2} = \frac{S_x}{I_1}$$

A kétoldali szegecselt hevederrel erősített hengerelt tartóban az alábbi csúsztatóerők keletkeznek, amely erőre a kapcsolatot méretezni kell az alábbi differenciálegyenlet alapján:

$$L'' - \omega^2 L + \alpha M = 0$$

$$f^2 [=] 1/\text{mm}^2 \quad \alpha [=] 1/\text{mm}^3 \quad \omega^2 [=] = S_x/I_1 [=] 1/\text{mm} \quad L [=] N \quad L'' [=] N/\text{mm}^2$$

A jelenséget leíró DE1 differenciálegyenlet és $L(x)$ általános megoldása:

$DE1 := \text{diff}(L(x), x, x) - \omega^2 L(x) + \alpha M(x) = 0;$

$$DE1 := \left(\frac{d^2}{dx^2} L(x) \right) - \omega^2 L(x) + \alpha M(x) = 0$$

$S := \text{dsolve}(DE1, L(x));$

$$S := L(x) = e^{(-\omega x)} _C2 + e^{(\omega x)} _C1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha \left(\int e^{(\omega x)} M(x) dx - \int e^{(-\omega x)} M(x) dx e^{(2\omega x)} \right) e^{(-\omega x)}}{\omega}$$

Avagy hiperbolikus függvényekkel kifejezve:

$S := \text{dsolve}(DE1, L(x));$

$$S := L(x) = \int -\frac{\cosh(\omega x) \alpha M(x)}{\omega} dx \sinh(\omega x) + \int \frac{\sinh(\omega x) \alpha M(x)}{\omega} dx \cosh(\omega x) + _C1 \sinh(\omega x) + _C2 \cosh(\omega x)$$

Az integrálási állandók meghatározása a kerületi feltételekből:

$C1 := c1; _C2 := c2; L(x) := \exp(\omega x) _C2 + \exp(\omega x) _C1 / 2 * \alpha * (-\text{Int}(\exp(\omega x) * M(x), x) + \text{Int}(\exp(\omega x) * M(x), x) * \exp(2 * \omega x))) * \exp(-\omega x) / \omega;$

$$L(x) := e^{(-\omega x)} c2 + e^{(\omega x)} c1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha \left(-\int e^{(\omega x)} M(x) dx + \int e^{(-\omega x)} M(x) dx e^{(2\omega x)} \right) e^{(-\omega x)}}{\omega}$$

$dL(x) := \text{diff}(L(x), x);$

$$dL(x) := -\omega e^{(-\omega x)} c2 + \omega e^{(\omega x)} c1 - \frac{1}{2} \alpha \left(-e^{(\omega x)} M(x) + e^{(-\omega x)} M(x) e^{(2\omega x)} + 2 \int e^{(-\omega x)} M(x) dx \omega e^{(2\omega x)} \right) e^{(-\omega x)} / \omega + \frac{1}{2} \alpha \left(-\int e^{(\omega x)} M(x) dx + \int e^{(-\omega x)} M(x) dx e^{(2\omega x)} \right) e^{(-\omega x)}$$

$dL(0) := \text{subs}(x=0, dL(x)) = 0; \quad dL(0) := -$

$\omega \exp(0) * c2 + \omega \exp(0) * c1 / 2 * \alpha * (\exp(0) * M(0) + \exp(0)^2 * M(0) + 2 * \text{Int}(\exp(0) * M(0), x) * \omega \exp(0)) * \exp(0) / \omega + 1 / 2 * \alpha * (-\text{int}(\exp(0) * M(0), x) + \text{int}(\exp(0) * M(0), x) * \exp(0)) * \exp(0) = 0;$

$$dL(0) := -\omega c2 + \omega c1 - \alpha \int M(0) dx = 0$$

$L(a) := \text{subs}(x=a, L(x)) = 0; \quad L(a) := \exp(\omega a) * c2 + \exp(\omega a) * c1 - 1 / 2 * \alpha * (\text{Int}(\exp(\omega a) * M(a), x) + \text{Int}(\exp(\omega a) * M(a), x) * \exp(2 * \omega a)) * \exp(-\omega a) / \omega = 0;$

$$L(a) := e^{(-\omega a)} c2 + e^{(\omega a)} c1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha \left(-\int e^{(\omega a)} M(a) dx + \int e^{(-\omega a)} M(a) dx e^{(2\omega a)} \right) e^{(-\omega a)}}{\omega} = 0$$

$L(a) := \text{subs}(x=a, L(x)) = 0$; $L(a) := \exp(\omega a) * c_2 + \exp(\omega a) * c_1 / 2 * \alpha * \int \exp(\omega a) * M(a), x + \int \exp(\omega a) * M(a), x * \exp(2 * \omega a) * \exp(\omega a) / \omega = 0$;

$$L(-a) := e^{(\omega a)} c_2 + e^{(-\omega a)} c_1 - \frac{1}{2} \alpha \left(- \int e^{(-\omega a)} M(-a) dx + \int e^{(\omega a)} M(-a) dx e^{(-2\omega a)} \right) e^{(\omega a)} = 0$$

$S1 := dL(0)$; $S1 := \omega * \exp(0) * c_2 + \omega * \exp(0) * c_1 / 2 * \alpha * (\exp(0) * M(0) + \exp(0)^2 * M(0) + 2 * \int \exp(0) * M(0), x * \omega * \exp(0)) * \exp(0) / \omega + 1 / 2 * \alpha * (\int \exp(0) * M(0), x + \int \exp(0) * M(0), x * \exp(0)) * \exp(0) = 0$;

$$S1 := -\omega c_2 + \omega c_1 - \alpha \int M(0) dx = 0$$

$S2 := L(a)$; $S2 := \exp(\omega a) * c_2 + \exp(\omega a) * c_1 / 2 * \alpha * (\int \exp(\omega a) * M(a), x + \int \exp(-\omega a) * M(a), x * \exp(2 * \omega a)) * \exp(-\omega a) / \omega = 0$;

$$S2 := e^{(-\omega a)} c_2 + e^{(\omega a)} c_1 - \frac{1}{2} \alpha \left(- \int e^{(\omega a)} M(a) dx + \int e^{(-\omega a)} M(a) dx e^{(2\omega a)} \right) e^{(-\omega a)} = 0$$

$C12 := \text{solve}(\{S1, S2\}, \{c_1, c_2\})$;

$$C12 := \left\{ c_1 = \frac{\alpha M(0)}{\omega ((e^{(\omega a)})^2 + 1)} \int 1 dx, c_2 = - \left(\frac{(e^{(\omega a)})^2 \alpha M(0)}{\omega ((e^{(\omega a)})^2 + 1)} \int 1 dx \right) \right\}$$

$c1 := \alpha * \int M(0), x / (\omega * (\exp(\omega a)^2 + 1))$;

$c2 := \exp(\omega a)^2 * \alpha * \int M(0), x / (\omega * (\exp(\omega a)^2 + 1))$;

$$c1 := \frac{\alpha M(0) x}{\omega ((e^{(\omega a)})^2 + 1)} \quad c2 := - \frac{(e^{(\omega a)})^2 \alpha M(0) x}{\omega ((e^{(\omega a)})^2 + 1)}$$

$L(x) := \exp(-\omega x) * c_2 + \exp(\omega x) * c_1 - 1 / 2 * \alpha * (- \int \exp(\omega x) * M(x), x + \int \exp(-\omega x) * M(x), x * \exp(2 * \omega x)) * \exp(-\omega x) / \omega$;

$$L(x) := - \frac{e^{(-\omega x)} (e^{(\omega a)})^2 \alpha M(0) x}{\omega ((e^{(\omega a)})^2 + 1)} + \frac{e^{(\omega x)} \alpha M(0) x}{\omega ((e^{(\omega a)})^2 + 1)} - \frac{1}{2} \alpha \left(- \int e^{(\omega x)} M(x) dx + \int e^{(-\omega x)} M(x) dx e^{(2\omega x)} \right) e^{(-\omega x)}$$

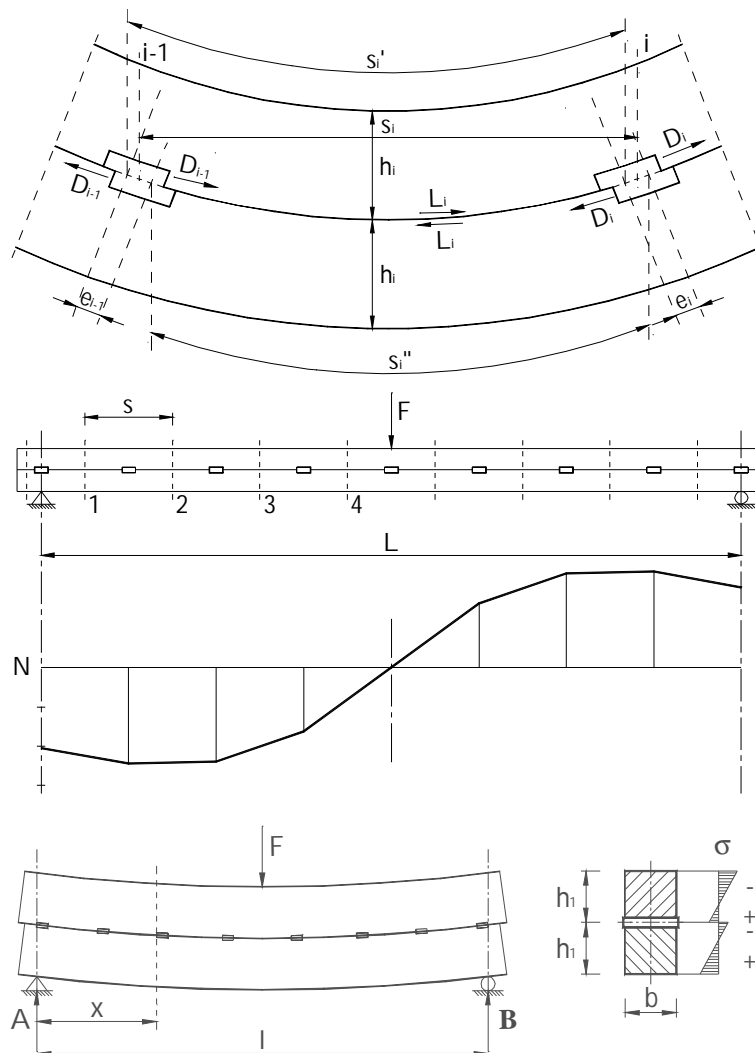
A differenciálegyenlet egyszerű terhelésekre közvetlen integrálással oldható meg. Kereshetjük

az ismeretlen függvényt az $L = c_1 \text{sh}(\omega x) + c_2 \text{ch}(\omega x) + \frac{\alpha M(x)}{\omega^2} + \frac{\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} M(x)}{\omega^4} + \dots$ alakban

is. A c_1 és c_2 integrálási állandókat a fenti kerületi feltételekből tudjuk megállapítani. A nyomtérk értéke a külső terheléstől függ.

4.2. KÉTFÁS ILL. TÖBBFÁS GERENDA

A fatartók keresztmetszete növelésének gyakorlati akadálya lehet, így gyakran szükség van arra, hogy a tartó teherbírását több gerenda összekapcsolásával növeljük. Az összekapcsolás a tartók egymáson való korlátozott elmozdulását lehetővé teszi. Az összekapcsolt keresztmetszetek száma határozza meg, hogy egy tartó hány „fás”? Az összekapcsolást méretezni kell, melynek alapfeltétele a keresztmetszeti részek között, a csatlakozó felületeken fellépő csúsztatóerő nagysága. Ezen erő függ a csatlakozás milyenségétől. Olyan kapcsolatot tételezünk fel – fabetét, fémbetét, facsavar, szeglemez, stb. –, amely alakváltozik, tehát az elcsúszás lehetséges. Ezek a rugalmas kapcsolatok, amelyeknél a relatív alakváltozás (Du) arányos a $T(x)$ csúsztatóerővel. Egyenes arányosságot, lineáritást tételezünk fel, arányossági tényező egyes kötőelemeknél a C_i [N/mm] deformációval szembeni ellenállás, ill. ha ezt az ellenállást szétszjtjuk az s_i szakaszon, megkapjuk a K [N/mm²] elcsúszási ellenállást.



4. ábra

A kétfás tartó számítási vázlata

Azaz: $\mathbf{K} = \mathbf{C}_i/s_i$. Ha a gerenda mentén a kapcsolatok minden vonatkozásban (anyagminőség, kialakítás, geometria) megegyeznek, akkor a \mathbf{C}_i ellenállás állandó. Az alapösszefüggés:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{K} \times \Delta \mathbf{u}$$

Tehát a $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ és a $D\mathbf{u}$ ábrák csak léptékben különböznek egymástól. Amennyiben \mathbf{K} a tartó tengelye mentén állandó, akkor a két ábra pontonkénti ordinátáinak hányadosa megegyezik. Amennyiben nem mondható el, hogy a $\mathbf{T}(\mathbf{x})/D\mathbf{u}$ hányados a szerkezet tengelye mentén állandó, akkor meg kell keresnünk az aktuális esetre a két mennyiség közötti összefüggést, és azt kell alkalmaznunk. Mivel ez nagyon problémás, arra kell törekednünk, hogy a \mathbf{K} elcsúszási modulust állandónak tételezzük fel. A következő fejezetben megvizsgáljuk a megmért elcsúszások jellegét az alábbiakban vizsgált $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ függvény ismeretében. A mért tartó viselkedését amiatt kell megismernünk, mert a lehajlásait számítanunk kell azon pontokban, ahol nem mértük az elmozdulásokat. Ugyanis az identitásvizsgálat miatt szükségünk van a tartó merevségi mátrixára (3.1.3.2.2. pont, 46. oldal), amelyet a hajlékonyságokból, azaz az egységnyi erőre való lehajlásokból határozzunk meg. Ennek szokásos elmélettel való elvégezhetőségéhez arra is szükség van, hogy a tartó lehajlásainak változása lineáris legyen. Ha ez nem lineáris, és/vagy ismeretlen a linearitás feltételezésével elkövetett hiba nagysága, akkor geometriai (talán fizikai is) nemlinearitásról beszélünk.

Ennek egy lehetséges megoldása, hogy apró lépésekben, linearitást feltételezve oldjuk meg a problémánkat. Mivel a gyakorlati építőmérnöki feladatok a tartószerkezetek viselkedését általában határállapotban vizsgálják, hiszen a tervezőnek tönkremenetelt kell megakadályoznia, és nem a tényleges terhekre való viselkedést kell figyelnie, a linearitást joggal feltételezheti.

A hajlítás okozta elmozdulás és alakváltozás nagysága a keresztmetszet súlypontja felett és alatt eltér. (4. ábra) Az egymás melletti helyeken (i , valamint $i-1$) lévő alsó és felső fabetét (2-2 db) súlypontjainak távolsága azonos, függetlenül attól, hogy a görbület melyik oldaláról nézem. Az elcsúszásnak tehát akkorának kell lennie, hogy

$$s_i' + e_i = s_i'' + e_{i-1}.$$

A keresztmetszet geometriai jellemzői:

$$I_1 = \frac{b \times h_1^3}{12}; \quad W_1 = \frac{b \times h_1^2}{6}; \quad I_0 = \frac{b \times (2h_1)^3}{12}; \quad W_0 = \frac{b \times (2h_1)^2}{6} = 4 \times W_1; \quad A_1 = b h_1$$

A keresztmetszetek érintkező felületén fellépő erők és elmozdulások:

$$D_i = L_{i+1} - L_i \quad \text{és} \quad e_i = \frac{D_i}{C_i}$$

Tételezzük fel, hogy a keresztmetszetet terhelő M_i külső nyomaték 50-50% arányban oszlik meg a két egymáshoz illesztett gerenda között. Ezen nyomaték egy szakaszon belül legyen állandó, a szakasz nyomatékainak átlaga. Jelölése: M_{oi} . Az egyes szálak alakváltozás és elmozdulás utáni hossza az s_i eredeti hosszából, az M_{oi} és az $L_{oi} \times h_1/2$ nyomatékok okozta normálfeszültség és a tengelyirányú külpontos L_i okozta normálfeszültség miatti megnyúlásból/rövidülésből számítható:

$$s_i' = s_i + \frac{M_{oi}}{EW_1} \times s_i - \frac{L_i}{EA_i} s_i - \frac{L_i}{EW_1} \frac{h_1}{2} \times s_i = s_i \left(\frac{E}{E} \mathbf{1} + \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} \right)$$

A képlet egyszerűsítése úgy lehetséges, hogy adott keresztmetszeti jellemzőket helyettesítünk be. Pl. most a két azonos és állandó (azaz $h_i = \text{const}$, és ez legyen h_1) keresztmetszetű gerendából kialakított kétfás tartó geometriai jellemzőit helyettesítjük be az L_i csúszatóerőt tartalmazó mennyiségekbe, majd kiemelünk és összevonunk:

$$\frac{L_i}{E} h_1 \frac{1}{6} \frac{1}{bh_1 \times h_1} + \frac{1}{2} \frac{1}{bh_1^2} = - \frac{L_i h_1}{EW_1} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} = - \frac{2}{3} \frac{L_i h_1}{EW_1}$$

A másik hosszra is levezetés nélkül a fentiek alapján:

$$s_i' = s_i \left(\frac{E}{E} \mathbf{1} + \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} \right) \text{ és } s_i'' = s_i \left(\frac{E}{E} \mathbf{1} - \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} \right)$$

A fabetétek alakváltozásából az alábbi elcsúszások számíthatók:

$$e_i = \frac{D_i}{C_i} = \frac{L_{i+1} - L_i}{C_i} \quad e_{i-1} = \frac{D_{i-1}}{C_{i-1}} = \frac{L_i - L_{i-1}}{C_{i-1}}$$

Behelyettesítve eddigi eredményeinket a hosszak azonossága képletébe, feltételezve, hogy a kötőelemek elcsúszási ellenállása azonos, tehát $C_i = \text{const} = C$:

$$-L_{i-1} + \left(2 + \frac{4}{3} \frac{C}{E} \frac{h_1}{W_1} s_i \right) L_i - L_{i+1} = \frac{C}{E} \frac{1}{W_1} s_i M_{oi}$$

A 3. ábra tartójának egyensúlyát az alábbi differenciálegyenlet írja le folytonos elcsúszási ellenállás ($C_i = \text{const} = C$, és $s_i = \text{const} = s$) azaz a K alkalmazása esetén:

$$\frac{L_i - L_{i-1}}{C} + s \frac{E}{E} \mathbf{1} - \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} = \frac{L_{i+1} - L_i}{C} + s \frac{E}{E} \mathbf{1} + \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}}$$

$$\frac{L_i - L_{i-1}}{C} - \frac{L_{i+1} - L_i}{C} + s \frac{E}{E} \mathbf{1} - \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} - s \frac{E}{E} \mathbf{1} + \frac{1}{EW_1} \times \frac{M_{oi}}{2} - \frac{2}{3} L_i h_1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} = 0 \quad / \frac{C}{s^2}$$

$$K = \frac{C}{s}, \text{ így } \frac{-L_{i-1} + 2L_i - L_{i+1}}{s^2} + \frac{K}{E} \frac{4h_1}{3W_1} L_i - \frac{K}{E} \frac{1}{W_1} M_{oi} = 0$$

Vezessük le a geometriai jellemzőket a 4.ábra szerinti keresztmetszetre:

$$I_1 = \frac{b \times h_1^3}{12}; \quad W_1 = \frac{b \times h_1^2}{6}; \quad I_0 = \frac{b \times (2h_1)^3}{12}; \quad W_0 = \frac{b \times (2h_1)^2}{6} = 4 \times W_1; \quad A_1 = b h_1$$

$$\frac{4}{3} \frac{h_1}{W_1} = \frac{8}{A_1} \quad \text{vala min t} \quad \frac{1}{W_1}$$

$$\text{Jelölések: } \frac{4}{3} \frac{C \times s \times h_1}{E W_1} \text{ ® } \frac{4}{3} \frac{K}{E} \frac{h_1}{W_1} = \omega^2 \quad \text{és} \quad \frac{C \times s}{E W_1} \text{ ® } \frac{K}{E} \frac{1}{W_1} = \alpha$$

Értelmezzük az L_i csúsztatóerőt folytonos függvényként, amelynek második deriváltját dif-

ferenciálással felírva a $\frac{L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1}}{s^2} \gg \frac{d^2 L(x)}{dx^2}$ kifejezést kapjuk. A külső erők

M_{0i} nyomatékát sem szakaszonként figyeljük, hanem a tartó tengelye mentén értelmezett folytonos (vagy szakaszonként folytonos) függvényként értelmezzük. Így a problémát leíró differenciálegyenlet megegyezik a 4.1.pont egyenletével, csak az azonosan jelölt állandó együtthatók jelentése eltérő:

$$L'' - \omega^2 L + \alpha M = 0$$

$$f^2 [=] 1/\text{mm}^2 \quad \wedge [=] 1/\text{mm}^3 \quad L [=] \text{N} \quad L'' [=] \text{N}/\text{mm}^2$$

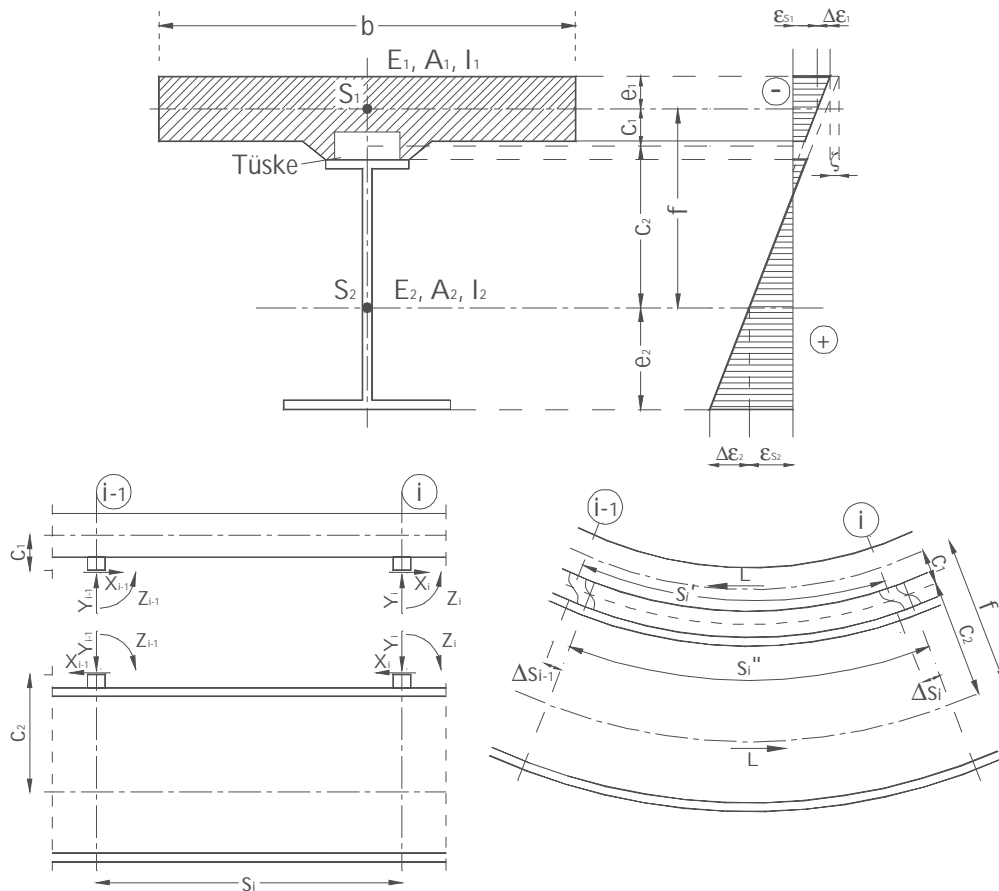
A kétfás tartóban keletkező csúsztatóerő-függvény meghatározására a Melléklet mintafeladatot tartalmaz.

A többfás fatartók elméleti vizsgálatát a szakirodalomban megtaláljuk, pl. [HEILIG, R. 1953], [PISCHL, R. 1968, 1969], [KNEINDL, R. 1990], [DABAON, M., TSCHEMMERNEGG, F., HASSAN K., ABDEL LATEEF, T. 1993], stb.

4.3. ÖSZVÉRTARTÓ

Ha egy tartószerkezet keresztmetszetét úgy alakítjuk ki, hogy az egymástól eltérő anyagokból álljon, és a csatlakozási felületükön kialakuló elcsúszásokat valamely kötőelemekkel megakadályozzuk, öszvértartóról beszélünk. A tartó anyagainak azonos helyű alakváltozása megegyezik, de az eltérő rugalmassági modulusok miatt az azonos alakváltozásokból más-más feszültség keletkezik. Az elcsúszás jól kialakított megakadályozásához ismernünk kell a csúsztatóerő nagyságát, amelynek meghatározása feltételezi az elcsúszási állandók (C_i ill. K) ismeretén kívül az aktuális körülmények közötti elcsúszás ismeretét, azaz matematikai leírását is.

Ez a feladat néhány jellemző eltérés figyelembevételével alapjaiban megegyezik az előző két tartó vizsgálatával, és ugyanazon differenciálegyenlethez vezet. Vizsgáljuk meg az öszvértartók egy kialakítását az 5.ábra jelöléseit alkalmazva:



5. ábra

Az acél-beton anyagú öszvértartó számítási vázlata

A fenti ábrán a keresztmetszet alakváltozását tüntettük fel, ugyanis a rugalmas tartó feltételezése miatt a keresztmetszet elfordulása sík marad, azaz az egyes anyagokban (az j . betonban és a k . acélban) ábrázolt elfordulást mutató vonalak egymással párhuzamosak maradnak.

A keresztmetszetben ható külső nyomatékot – folytonos tárgyalás esetén $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, csomópontkénti tárgyalás esetén \mathbf{M}_i , $i = 1 \dots n$ – az alábbi feszültségek egyensúlyozzák:

- a betonban $\sigma_{1s} = E_1 \cdot \epsilon_{1s}$ valamint $D \cdot \sigma_1 = E_1 \cdot D \cdot \sigma_1$
- az acélban $\sigma_{2s} = E_2 \cdot \epsilon_{2s}$ valamint $D \cdot \sigma_2 = E_2 \cdot D \cdot \sigma_2$.

A normálerők összege zérus, azaz az L normálerő anyagonként nagyságra megegyezik (vízszintes vetületi egyenlet): $L = \sigma_{1s} A_1 = \sigma_{2s} A_2$

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet: $M = Lf + V\sigma_1 \frac{l_1}{e_1} + V\sigma_2 \frac{l_2}{e_2}$

Rugalmasságtani feltétel az, hogy az elfordult síkok párhuzamosak egymással, azaz a függőlegessel bezárt szögük, ill. annak tangense megegyezik:

$$\frac{V\epsilon_1}{e_1} = \frac{V\epsilon_2}{e_2} \text{ avagy } \frac{V\sigma_1}{E_1 e_1} = \frac{V\sigma_2}{E_2 e_2}$$

Az L_i hosszirányú csúsztatóerő és az X_i kapcsolati erők meghatározása vonatkozó rugalmasságtani feltétel:

$$L_i = \overset{i-1}{\underset{x}{\Delta}} X \text{ ill. } X_{i-1} = L_i - L_{i-1} \text{ és } X_i = L_{i+1} - L_i$$

Tételezzük fel, hogy a kapcsolóelemek mind agyagminőségre, mind kialakításra és geometriailag is azonosak. Így az elcsúszással szembeni ellenállásuk is megegyezik, $C_i = \text{konst} = C$.

A kapcsolóelem alakváltozása (5.ábra):

$$Ds_i = \frac{X_i}{C_i} = \frac{L_{i+1} - L_i}{C_i} = \frac{L_{i+1} - L_i}{C} \text{ és } Ds_{i-1} = \frac{X_{i-1}}{C_{i-1}} = \frac{L_i - L_{i-1}}{C_{i-1}} = \frac{L_i - L_{i-1}}{C}$$

A tartó meggörbül és a kötőelemek is alakváltoznak. A 5.ábrán látható hosszak továbbra is megegyeznek az alábbi geometriai összefüggés szerint:

$$Ds_{i-1} + s_i'' = Ds_i + s_i'$$

A vasbetonban kijelölt s_i' , és az acélban kijelölt s_i'' hossz meghatározása:

$$s_i' = s_i \left(1 - \frac{\sigma_{1s}}{E_1} + \frac{D\sigma_1 c_1}{E_1 e_1}\right) \text{ vala mint } s_i'' = s_i \left(1 + \frac{\sigma_{12s}}{E_2} - \frac{D\sigma_2 c_2}{E_2 e_2}\right)$$

A fenti geometriai összefüggésbe helyettesítsük be a meghatározott összefüggéseket:

$$\frac{L_i - L_{i-1}}{C_{i-1}} + \frac{s_i}{E_2} \frac{\sigma_{12s}}{e_2} + \sigma_{2s} - D\sigma_2 \frac{c_2}{e_2} = \frac{L_{i+1} - L_i}{C_i} + \frac{s_i}{E_1} \frac{\sigma_{1s}}{e_1} + \sigma_{1s} - D\sigma_1 \frac{c_1}{e_1}$$

A fenti azonosságba a $\sigma_{1s} = \frac{L_i}{A_1}$ és $\sigma_{12s} = \frac{L_i}{A_2}$ összefüggések behelyettesíthetők a korábbiakkal együtt. Geometriai összefüggések:

$$n_1 = \frac{E_1}{E_c}, \text{ és } n_2 = \frac{E_2}{E_c}. \text{ Legyen } E_c = E_2, \text{ így } n_2 = 1$$

$$I_{n_0} = n_1 I_1 + n_2 I_2, \quad A_{id} = 2 \frac{n_1 A_1 n_2 A_2}{n_1 A_1 + n_2 A_2} \quad I_n = I_{n_0} + A_{id} \frac{f^2}{2}$$

Fejtsük ki a szálak azonosságára vonatkozó egyenlőséget:

$$\frac{L_i - L_{i-1}}{C_{i-1}} + \frac{s_i}{E_2} \frac{\sigma_{12s}}{e_2} - \frac{M_i - L_i f}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \frac{c_2}{e_2} = \frac{s_i}{E_1} \frac{\sigma_{1s}}{e_1} - \frac{L_i}{E_1 A_1} + \frac{M_i - L_i f}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \frac{c_1}{e_1} + \frac{L_{i+1} - L_i}{C_i}$$

A három egymás melletti kapcsolóelemet terhelő vízszintes csúsztatóerők közötti összefüggés:

$$\frac{L_{i-1}}{C_{i-1}} - L_i \frac{1}{E_2} \frac{1}{C_{i-1}} + \frac{1}{C_i} + 2 \frac{s_i I_n}{E_c I_{n_0} A_{id}} \frac{\sigma_{12s}}{e_2} + \frac{L_{i+1}}{C_i} = - \frac{s_i f}{E_c I_{n_0}} M_{im}$$

M_{im} : az i -edik szakaszon lévő külső nyomaték átlaga, amely a szakaszon belül konstans. Amennyiben az egyes kapcsolóelemek elcsúszással szembeni ellenállása azonos és állandó, megszorozhatjuk az egyenletet C -vel. Az s_i konstans és állandó.

$$L_{i-1} - L_i + 1 + 2 \frac{C \times s \times I_n}{E_c I_{n0} A_{id}} L_i + L_{i+1} = - \frac{C \times s \times f}{E_c I_{n0}} M_{im}$$

$$L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1} - 2 \frac{C \times s \times I_n}{E_c I_{n0} A_{id}} L_i = - \frac{C \times s \times f}{E_c I_{n0}} M_{im}$$

$$\frac{L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1}}{s^2} - \frac{C}{s \times E_c} \frac{I_n}{I_{n0} A_{id}} L_i = - \frac{C}{s \times E_c} \frac{f}{I_{n0}} M_{im}$$

Értelmezzük az L_i csúsztatóerőt folytonos függvényként, amelynek második deriváltját differenciálással felírva a $\frac{L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1}}{s^2} \approx \frac{d^2 L(x)}{dx^2} = L''$ kifejezést kapjuk. A külső erők M_{0i} nyomatékát sem szakaszonként figyeljük, hanem a tartó tengelye mentén értelmezett folytonos (vagy szakaszonként folytonos) függvényként értelmezzük. Így a problémát leíró differenciálegyenlet megegyezik a 4.1. és 4.2 pontokban is felírt egyenlettel, csak az azonosan jelölt állandó együtthatók jelentése eltérő:

$$L'' - \omega^2 L + \alpha M = 0$$

$$f^2 [=] 1/mm^2 \quad \omega^2 [=] 1/mm^3 \quad L [=] N \quad L'' [=] N/mm^2$$

Az L_i tartótengellyel párhuzamos erő együtthatóját jelöljük w^2 – el, a nyomaték együtthatóját pedig f – val. A C/s folytonos elcsúszási ellenállás azonos a K elcsúszási modulussal, az E_c rugalmassági modulus pedig legyen azonos az acél rugalmassági modulusával. $E_c = E_2$ Így:

$$\alpha = \frac{C \times s \times f}{s^2 E_c I_{n0}} = \frac{K}{E_2} \frac{f}{n_1 l_1 + l_2} \quad \text{és} \quad \omega^2 = 2 \frac{C \times s \times I_n}{s^2 E_c I_{n0} A_{id}} = \frac{K}{E_2} \frac{I_n}{I_{n0} A_{id}}$$

Ha a keresztmetszet két részből áll, és a két rész azonos anyagú ($E_1 = E_2 = E$), a fenti kifejezés azonos a [PISCHL, R. 1968] által alkalmazott összefüggéssel (5.2.2. pont):

$$\alpha = \frac{K}{E} \frac{f}{l_1 + l_2} \quad \text{és} \quad \omega^2 = \gamma^2 = \frac{K}{E} \frac{f}{l_1 + l_2} \frac{I_s}{S_s}$$

A három tartószerkezetet ugyanazon konstrukciójú differenciálegyenlet írja le, amely egyenlet állandó együtthatói (f és w^2) szerkezetenként/állapotonként eltérnek egymástól.

A vizsgált – közbenső szakaszán kétfás – tartó alsó és felső fájában keletkező tengelyirányú $N(x)$ erő leírására az előző esetekben végeredményként kapott differenciálegyenlet helyesen megválasztott peremfeltételek választásával alkalmas.

5. A GERENDA STATIKAI VÁZÁNAK MEGHATÁROZÁSA

Az egymáson elcsúszó keresztmetszetű tartók igénybevételeinek, mozgásainak meghatározása különbözik az egy szelvényből álló keresztmetszetű tartók hatásainak kiszámításától. Ennek alapvetően a keresztmetszeti részek egymáson való elcsúszása az oka. Az elcsúszások tulajdonsága, leírhatóságuk a tartó tengelye mentén, az elcsúszás nagyságának befolyásolhatósága a statikai váz felállítására nagy mértékben hatással lehet. Emiatt ezek vizsgálatával kezdem a statikai váz felállításához szükséges ismeretek összegyűjtését. Az elcsúszást jellemezzük a **K** elcsúszási modulusal [N/mm^2], ill. az **E** rugalmassági modulus is magában foglaló, és a keresztmetszet geometriai mennyiségeitől is függő g^2 elcsúszási relációval [$1/\text{mm}^2$].

5.1. AZ ELCSÚSZÁSOK VIZSGÁLATA

Idézet a mérési tervből (KJv.):

5.01/ teljesen (100 %) és azonos mértékben meghúzzuk a rögzítő csavarokat a két gerendában, valamint a felső gerenda toldásánál (a továbbiakban csukló). A meghúzás mértékét a nyomatékmérő kulccsal meghatározzuk. (100% \approx 7 kpm) A statikus terhelést max. 50 kN erőig növeljük több – legalább három – lépcsőben, és mérjük az utadók jeleit. (Szerk.100% • csukló 100%). – Eredmények: 5-66 táblázat.

5.02/ Kb. 70%-os mértékben húzzuk meg a gerendák csavarjait, a 100%-os meghúzású csavarokat az előbbi terhelés után korrigáljuk, és újra statikusan terhelünk az előbbi teherlépcsőkben. (Szerk.70% • csukló 100%) – Eredmények: 5-46 táblázat.

5.03/ Kb. 40%-os mértékben húzzuk meg a gerendák csavarjait, a 100%-os meghúzású csavarokat az előbbi terhelés után korrigáljuk, és újra statikusan terhelünk az előbbi teherlépcsőkben. (Szerk.40% • csukló 100%). – Eredmények: 5-26 táblázat.

5.1.1. Anyagjellemzők becslése

5.1.1.1. A K és a g érték

A felső és az alsó gerendát 7 db függőleges tengelyű, és 2 db, a vízszintessel $67,5^\circ$ -ot bezáró (l. a mellékelt tervrajzot) ferde csavarral kötöttük össze. Az M12 jelű normál menetemelkedésű csavarok jellemzői a [SZABÓ Miklós, 1998] és [RÓNAI Ferenc, 1992] alapján. Jelölések:

- M_1 a csavar meghúzásához szükséges nyomaték (Nmm);
- Q_1 : a csavarban fellépő erő (N);
- Δ : menetemelkedés (mm);
- f : a menet emelkedésének hajlásszöge;
- m : nyugalmi súrlódási együttható, amely a gatterolt felületek között legyen 0,45.
- d : a csavar névleges átm.-je (mm)
- d_2 : a csavar magátmérője (mm);
- ρ : súrlódási szög;

$$M_1 = \frac{d_2}{2} \cdot Q_1 \cdot \text{tg}(\alpha + \rho) \quad \Delta = 1,75 \text{ mm}; \quad d_2 = d - 0,6495 \cdot \Delta = 10,8634 \text{ mm}$$

$$\alpha = \arctg \frac{\Delta}{d_2 \cdot \pi} = \arctg \frac{1,75}{10,8634 \cdot \pi} = 2,9354^\circ \quad \rho = \arctg m = \arctg 0,45 = 24,2277^\circ$$

$$Q_1 = \frac{2 \cdot M_1}{d_2 \cdot \text{tg}(\alpha + \rho)} = \frac{M_1}{\frac{d_2}{2} \cdot \text{tg}(\alpha + \rho)} \quad \text{– ennek alapján a meghúzó nyomaték és a csavarban kelet-}$$

kező erő közötti összefüggés gatterolt felületek és M12 j. normál métermenetes csavar esetén:

$$Q_1 = \frac{M_1}{2,7871} \text{ [N]}$$

Az összekapcsolt gerendák elcsúszással szembeni, - számítással csak becsülhető nagyságú - ellenállása több, számítással bizonytalanul meghatározható tényezőtől tevődik össze.

Értékét – feltételeve az egyenlő eloszlást és az azonos csavarokat – $d_{2i} = \text{const} = d_2$ – a teljes kapcsolatra határozzuk meg, majd a csatlakozás hosszára – $\Delta t = 4480 \text{ mm}$ –, ill. a teljes felületére ($\Delta t \cdot b = 4480 \cdot 207,5 = 929600 \text{ mm}^2$) – egyenletesen szétosztjuk, jóllehet nem állandó. Az elcsúszáshoz le kell győzni a felületek közötti súrlódó erőt (T_i), a csavaroknak alakváltozniuk kell (a csavarok végeinek egymáshoz képesti 1 mm-es eltolódásakor R_i erő keletkezik), és a csavaroknak be kell a fába nyomódnuk: 1 mm benyomódás esetében ehhez az összenyomódási merevség s_i hossza vonatkoztatott értékével megegyező P_i erő szükséges.

Így az elcsúszással szembeni K megoszló ellenállást $[\text{N}/\text{mm}^2]$ ill. ennek egy csavarra jutó C_i $[\text{N}/\text{mm}]$ értékét az ellenálló erők $T_i + R_i + P_i$ összege határozza meg ($i = 1 \div 9$). Ezek fajlagos értéke:

1. Az M_{1j} ($j = 1 \div 6$) nyomatékkal meghúzott i j. csavarban keletkező Q_{1i} erőből az érintkező felületeken a súrlódásból fellépő, a csavarok meghúzásának mértékétől függő, de az eltolódás nagyságától független fajlagos vízszintes ellenállás (N/mm):

$$T = \mu \times \frac{M_{1j}}{\frac{d_2}{2} \times b \times \text{tg}(\alpha + \rho)}$$

$d_2 = 10,8634 \text{ mm}$ $b = 207,5 \text{ mm}$ $\mu = 0,45$

2. A csavar rugalmasan megtámasztott és befogott hajlított tartó.

$d = 12 \text{ mm}$, $E = 210000 \text{ N}/\text{mm}^2$, $l = 416,22 \text{ mm}$. Az n db csavar fajlagos elmozduláshoz szükséges erő (most $n = 9$):

$$\sum_{i=1}^9 R_i = n \frac{12 \cdot E l}{l^3}$$

3. A csavarok a rostok irányába az összenyomódási merevségnek megfelelő erő hatására nyomódnak be egységnyit t hosszon. $E = 6800 \text{ N}/\text{mm}^2$ $h = 208,11 \text{ mm}$ $A_{be} = d \cdot h$ és

$t = 4480 \text{ mm}$. Az ehhez szükséges erők összege :

$$\sum_{i=1}^9 P_i = \sum_{i=1}^9 \frac{E \cdot A_{be}}{t}$$

Az elcsúszással szembeni ellenállás a vizsgált tartón konstans, azt feltételezve, hogy a súrlódás nagysága is állandó, a kilenc db csavar geometriája megegyezik, de az s_i távolságok eltérnek. Mindegyiket csavart ugyanakkora erővel húztuk meg, valamint elfogadjuk valóságnak a fenti jellemző értékeket.

Számítsuk ki, hogy min. 2 kpm, és max. 7 kpm meghúzási nyomaték esetén mekkora az elcsúszással szembeni egyenletes és az egy csavarra eső ellenállás!

4. A szélső ferde csavarokban lévő normálerő függőleges vetülete $Q_1 \cdot \cos 22,5^\circ$:
 5. Az egyes meghúzási nyomatékokhoz tartozó csúszási ellenállások

- ferde csavarok

$$C_{1j} = C_{9j} = \mu \cdot \frac{2 \cdot M_j}{d_2 \cdot b \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho)} \cdot \cos 22,5^\circ + \frac{12 \cdot EI}{l^3} + \frac{E \cdot A_{be}}{t}$$

- merőleges csavarok

$$C_{2j} = \dots = C_{8j} = \mu \cdot \frac{2 \cdot M_j}{d_2 \cdot b \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho)} + \frac{12 \cdot EI}{l^3} + \frac{E \cdot A_{be}}{t}$$

- az elcsúszási modulus ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$)

$$K_{ij} = \frac{C_{ij}}{t_i}$$

A kísérleti tartón meghatároztuk a K és a C értékeket. Az **E** a csavar, az **Em** pedig a fa rugalmassági modulusát jelöli, μ a gatterolt felületek közötti nyugalmi súrlódási tényező. A fenti összefüggéseket számítjuk ki változó M_j nyomatékok függvényeként. Az eredményeket az 5. táblázatban soroljuk fel.

restart:

```
d:=12: d2:=d-0.6495*1.75: E:=210000: l:=416.22: Em:=6800:
h:=208.11: b:=207.5: t1:=520: t2:=450: t3:=300: t5:=600:
t:=4480: alpha:=evalf(2.9354*Pi/180);
rho:=evalf(24.2277*Pi/180);mu:=0.45:
alpha:=0.05123239488 rho:=0.4228531351
```

Az M_j nyomaték változik, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kpm értékeket vesz fel.

Mj:=20000;

$M_j := 20000$

Ferde csavar 1j, 9j.

```
Cf:=evalf(mu*Mj/(d2/2*tan(alpha+rho)*b)*cos(Pi/180*22.5)+12*E*Pi*d^4/64/(l^3)+Em*h*d/t);
```

$C_f := 3840.526190$

Függőleges csavar 2j., 3j., 4j. 5j., 6., 7j., 8j.

```
Cm:=evalf(mu*Mj/(d2/2*tan(alpha+rho)*b)+12*E*Pi*d^4/64/(l^3)+Em*h*d/t);
```

$C_m := 3841.710799$

```
K1:=Cf/t1;K2:=Cm/t2;K3:=Cm/t3;K4:=K2;K5:=Cm/t5;K6:=K2;K7:=K3;K8:=K2;K9:=K1;
```

$K_1 := 7.385627289$

$K_2 := 8.537135109$

$K_3 := 12.80570266$

$K_5 := 6.402851332$

Cf; Cm;

3840.526190

3841.710799

Átlagolva a teljes elcsúszási felületen (b·t): $K = 7,76 \text{ N/mm}^2$

5. táblázat

M_j nyomatékok		Csúszási ellenállások		Elcsúszási modulusok			
		Ferde csavarok	Függőleges csavarok	$t_1 = t_9 =$ $= 520 \text{ mm}$	$t_2 = t_4 = t_6 = t_8 =$ $= 450 \text{ mm}$	$t_3 = t_7 =$ $= 300 \text{ mm}$	$t_5 =$ $= 600 \text{ mm}$
		C_1, C_9	$C_2, C_3, C_4, C_5,$ C_6, C_7, C_8	$K_1 = K_9$	$K_2 = K_4 =$ $= K_6 = K_8$	$K_3 = K_7$	K_5
j	kpm	N/mm		N/mm ²			
1	2	3840,526	3841,711	7,386	8,537	12,806	6,403
2	3	3847,715	3849,492	7,399	8,554	12,832	6,416
3	4	3854,904	3857,273	7,413	8,572	12,858	6,429
4	5	3862,093	3865,054	7,427	8,589	12,884	6,442
5	6	3869,282	3872,835	7,441	8,606	12,909	6,455
6	7	3876,470	3880,616	7,455	8,624	12,935	6,468
Átlag-értékek		3858,498	3861,164	7,42	8,58	12,87	6,44
		3860 N/mm		8,83 N/mm²			

6. Az M_j meghúzási nyomaték értéke az 5. táblázat szerint gyakorlatilag nem befolyásolja az elcsúszások nagyságát. Emiatt mindegyik állapotra ugyanazon K legyen érvényes, és ez legyen az 5. táblázat szerinti értékek hossz szerinti súlyozásával kapott átlag. Az elcsúszási modulusot a $t = 4480 \text{ mm}$ hosszra osztjuk szét egyenletesen. Eredmény: $K = 7,76 \text{ N/mm}^2$. A γ^2 a K/E arány ismeretében geometriai adatokból (h, I_1, I_2, I_s, S_s jelölések magyarázata a megjelölt irodalomban) számítható a [PISCHL, R.

1969a] alapján:

$$\gamma^2 = \frac{K}{E} \cdot \frac{h}{I_1 + I_2} \cdot \frac{I_s}{S_s}$$

A Mellékletben (1.4.2.) található számítás alapján a g elcsúszási reláció becslése esetünkben:

$$0,00060 \text{ 1/mm} < g < 0,00075 \text{ 1/mm}$$

$$3,95 < g \cdot l < 4,95$$

A fenti számok arra utalnak, hogy az öszvérkapcsolat kissé gyenge! Ennek oka bizonyára az elégtelen elcsúszás elleni kapcsolat volt.

5.1.1.2. Az E rugalmassági és a G nyírési modulus

A Melléklet 1.1.2. és 1.4.4. pontjaiban a rug.-i modulus megbecsültük az alábbiak szerint:

$$2800 \text{ N/mm}^2 \leq E \leq 3700 \text{ N/mm}^2$$

Az 1.4.4. pontban meghatározott értékeket öszvértartón mért lehajlási értékekből becslünk úgy, hogy a statikai vázként állandó hajlítási merevségű tömör tartót vettünk fel, amelynek inerciáját a szabványos és állandó csökkentő tényezővel szoroztuk. A csökkentő tényező nem állandó, mivel a csavarok meghúzása is változik, így az $E \cdot I$ értékek is szórnak. A cél csak az volt, hogy az E rugalmassági modulus nagyságát megbecsüljük. Mindegyik vizsgálat eredménye a fenti határok közé illik. A nyíró rugalmassági modulus az ajánlások alapján a kezdeti rugalmassági modulus huszadaként vesszük fel.

A Melléklet 1.2. pontjából megállapítható, hogy a kísérleti gerendák nedvességtartalma kb. 10 %-ot csökkent a laborba való beszállítástól a kísérletek kezdetéig. A kezdeti rugalmassági modulus tehát a méréskor meghatározott érték 1,11-szerese volt. (Becsült érték esetén azonban ezt nem alkalmazzuk.) Így $G \approx E/20$, azaz a nyírési rugalmassági modulus határértékei:

$$140 \text{ N/mm}^2 < G < 185 \text{ N/mm}^2$$

5.1.2. Az elcsúszási görbék feldolgozása, levonható következtetések

A kísérleti tartón (3.5.Kéttámaszú gerenda... KJv. 69-72.o.) az egyes keresztmetszetekben mért elcsúszásokat több csoportosításban is ábrázoljuk a Mellékletben: M3., M4., M5., M6. táblázat és M2., M3., M4., M5. ábra. A görbéken további számításokat végeztünk:

- interpoláló hatványfüggvényt fektettünk az elcsúszási görbékre, majd deriválással meghatároztuk a relatív elcsúszások függvényét (Melléklet 1.4.5.3 pont);
- görbénként meghatároztuk az egyes görbék zéruspontjait és az ezen pontok közötti szélsőértékek helyét. (M9., M10., M11. és M12. táblázat) Az első deriváltfüggvény zérushelyei kijelölik az elcsúszásfüggvény szélsőértékeinek helyét. A második deriváltfüggvény zérushelyei az első deriváltfüggvény szélsőértékeit mutatják. A középtájon a $T(x)$ csúsztatóerő zérus, és az $N(x)$ normálerőnek szélsőértéke van:

$$\frac{dN(x)}{dx} = T(x);$$

- a balról mért relatív abszcissa (ξ) függvényében meghatároztuk a relatív/abszolút elcsúszások függvényét a tartó tengelye mentén. (M2., M3., M4., M5. ábra)

A linearitás feltételezése tervezés esetében nem lenne probléma, hiszen elfogadnánk érvényesnek a szokásos, faszervezeteknél alkalmazott fikciókat. [RÓNAI-SOMFALVI, 1982], [SELL, J. 1989], [SZALAI, 1994]. Azonban most a mért és a számított eredményeket azonosnak elfogadva akarunk a tartószerkezeten lehajlásokat meghatározni, melyekhez viszonylag pontos modell és pontos anyagminőségek szükségesek.

Valószínűleg a tervezéshez alkalmazottnál pontosabb modell vezet csak eredményre.

A modell és az anyagminőségek pontossága dinamikai egyeztetés esetén még lényegesebbek, ugyanis több összefüggő adatnak kell megegyeznie, mintha csak statikus értékeket vetnénk össze. – A szerkezetek ellenőrzött vázát nagyon nehéz meghatározni. Ezért is célszerű a helyszíni dinamikai mérés, mert ezen esetben komolyabb pontossági igény nincs a modellel szemben, mivel azt fel sem kell állítanunk, hiszen a tömegmátrixon kívül minden mérhető, minden meghatározható a dinamikai válaszfüggvények analizálásával;

- a \mathbf{T} csúsztatóerő a $\hat{\mathbf{u}}$ relatív elcsúszásokkal arányos, arányossági tényező a \mathbf{K} elcsúszási modulus (5.táblázat): $\mathbf{T} = \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{u}}$. Állandó \mathbf{K} esetben a \mathbf{T} és a $\hat{\mathbf{u}}$ ábra csak léptékben különbözik egymástól. – Ezen elméleti megállapítást kell az elvégzett mérésekre alkalmaznunk, ill. ezt figyelembe véve kell közelítést keresnünk. Az M5.ábrán mutatott $\hat{\mathbf{u}}$ függvények szerint a \mathbf{K} elcsúszási modulus nem állandó. A mért relatív elcsúszási értékeket, és a görbék metszéspontjait a tartó felének környékén az M6. táblázat tartalmazza.

A kísérleti kéttámaszú tartó mérési eredményeinek feldolgozásából az alábbi következtetések vonhatók le:

- 1/ Az elcsúszási ábrák nem szimmetrikusak, a relatív elcsúszási ábrák pedig nem antimetrikusak. A jelenségek mindkét fajtája azonos abban a tekintetben, hogy a görbék jobb és a bal oldala egységesen tér el egymástól mindegyik terhelő erő és mindegyik állapotú tartó esetén. A kétfás szakasz bal végén az elcsúszások kisebbek, mint a kétfás szakasz jobb végén.

Az elcsúszási görbék szélsőértékének helye a felső gerenda toldása alá esik. Itt kell feltételeznünk a rugalmas csuklót. Ez teszi lehetővé a gerenda nem szimmetrikus viselkedésének követését. Ugyanis a f és a \dagger pontokban mért lehajlások nem egyenlők. Ha a pontok szimmetrikus elhelyezkedését elfogadjuk, akkor csak a rugalmas csukló elfordulása miatt térhet el a két lehajlás. A toldás szakasza alá esik az elcsúszási ábrák szélsőértékének keresztmetszete. (M11. és M12. táblázat)

Az elcsúszási ábrák szélsőértékének helye	5-66	5-46	5-26
	0,663	0,654	0,655

A fenti értékek állapotonkénti átlagok. A konkrét hely pontosan nem meghatározható. Legyen a rugalmas csukló feltételezett helye a három fenti érték középértéke:

$$x_c = 0,658$$

A csuklót az ismeretlen k rugóállandó nagyságától függő koncentrált hajlítónyomatékkal modellezzük (6. ábra).

Megfigyelhető, hogy a görbék a bal oldali szakasza szinte párhuzamos és arányos, a jobb oldalon a terhelés növekedésével aránytalanul egyre kisebb lesz a különbség az elcsúszások között. Ezen az oldalon a görbék egy jól meghatározható pontban metszik egymást. A mért értékekre felírt interpolációs görbék alapján (5-66, 5-46, 5-26 tartók): $x = 0,758$. Ez a hely a f – , pontok között van (6. ábra), a **jobb oldali ferde csavar keresztmetszetében**, a bal oldali támasztól kb. 5 m távolságra. – A baloldali

zéruspont helye jobban szór, a tartó gyengülésével jobbra tolódik. Átlagértéke: $x=0,473$. Ez a pont a tartó közepének táján, a „ ... j. km.-től balra van.

Az M9., M10., M11. és M12. táblázatok mind az egyes állapotokhoz, mind az egyes terhelő erőkhez tartalmazzák a meghatározott jellegzetes abszcisszákat.

- 2/ A relatív elcsúszások értékei az alábbi helyeken jelölik ki a relatív elcsúszásokat mutató görbék (M5. ábra) zérushelyeit (M6. táblázat alapján):

Állapot	Terhelő erő						
	5 kN	10 kN	15 kN	20 kN	25 kN	30 kN	35 kN
5-66	0,510	0,531	0,538	0,540	0,542	0,545	0,543
5-46	0,523	0,538	0,540	0,542	0,544	0,547	0,548
5-26	0,529	0,541	0,544	0,548	0,551	0,552	0,553

A csúszatóerő előjelváltásának helye a terhelő erő növekedésével és az egyes fák együttdolgozásának csökkenésével 15-85 mm értékben jobbra tolódik. A tartó számítása során ez már befolyásolhatja a számított értékeket.

- 3/ Sarkalatos probléma a tartó szimmetriája és linearitása. A terhelés szimmetriáját és linearitását valamint az alkalmazott anyagok lineáris viselkedését elfogadjuk. (Az alkalmazott anyagok rugalmassági modulusa állandó.)

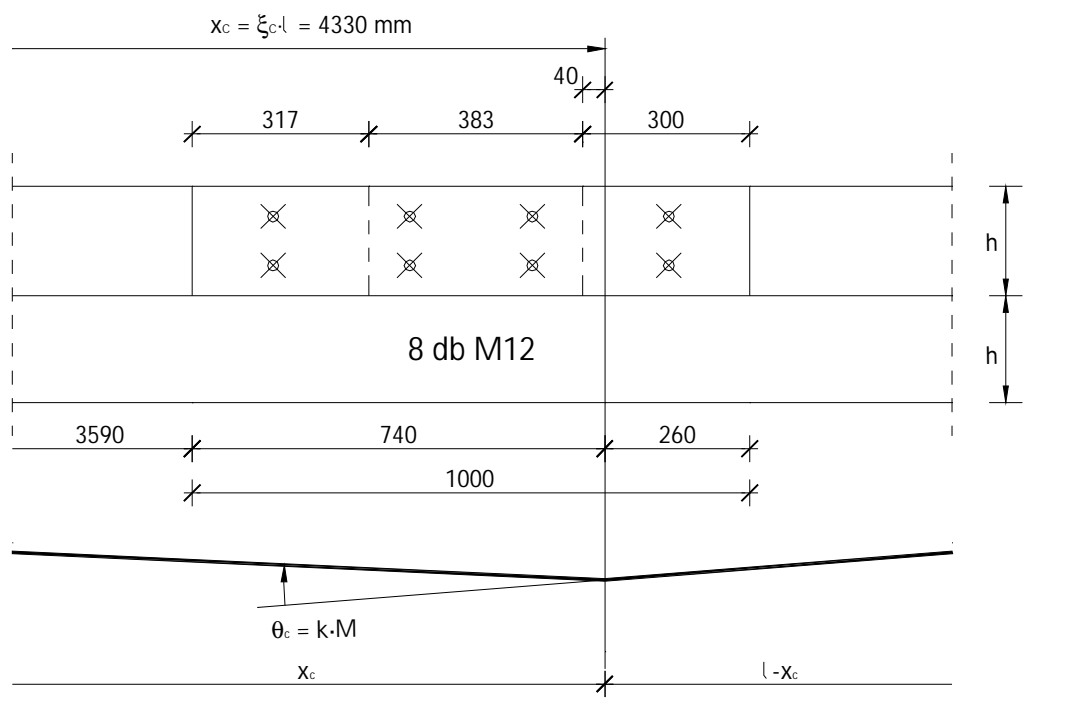
A tartószerkezet kialakítása nem szimmetrikus. A gyakorlati eseteknél nem jobban, de változnak a méretek, az alátámasztások helyei, a közbenső szakaszon kialakított kétfás szakasz felületeinek illeszkedése, az együttdolgoztatás erőssége és hatékonysága. (A K elcsúszási modulus és a g^2 elcsúszási reláció nem állandó.) A felső gerenda toldása sem szimmetrikus, valamint a toldási szakaszon relatív elfordulás lehetséges. Ez a kialakítás nem idegen a gyakorlattól. A határállapotra épülő méretezés esetén ezen egyenlőtlenségek nem játszanak szerepet. Esetünkben azonban, amikor mért és elméleti adatokat egyeztetünk, emiatt érzékenyebb elméleti megfontolásokat kell tennünk, a szimmetriától való eltérésnek az egyeztetés eredményességét nehezítő következménye van. Vagy a megoldhatatlanságig bonyolított sokparaméteres vázat kell felvennünk. Ezen utóbbinak nincs értelme, mert általánosabb következtetések nem vonhatók le belőle. Felveszünk egy, a lehető legtöbb sajátosságot figyelembe vevő szimmetrikus modellt. (7. ábra)

Az elcsúszások feldolgozása azt a megállapítást támasztja alá, hogy a szerkezeti viselkedés nem lineáris. Azaz az erő és az elcsúszások közötti összefüggés nem lineáris és változik a tartó állapotától és a terhelő erővel függően. Az 5 és 10 kN nagyságú terhelésre nem tételezhetünk fel linearitást, de a 15, 20 és 25 kN terhelésre igen.

Ennek a hajlékonysági mátrix számításánál lesz jelentősége. Ugyanis a mátrix elemei egységnyi terheléshez rendelt lehajlásokat tartalmaznak, tehát vagy az alkalmazott terhekből keletkező lehajlásokat arányosítjuk – a mátrix középső oszlopa –, vagy egységterherre végezzük el a számításokat a mátrix két szélső oszlopa elemeinek meghatározásához. (3.1.3.2. pont)

4/ Összességében: a tartó mért elmozdulásaiból és a feldolgozott mozgásaiból azt határozhatjuk meg, hogy sikerrel próbálkozhatunk egy anyagában lineáris (rugalmas), geometriai és szerkezeti kialakításában szimmetrikus, 15 kN – nál nagyobb terhelés esetében lineáris erő-lehajlás kapcsolatú szerkezet statikai és dinamikai számításai alapján a Disszertációban feltett kérdésre – dinamikai tulajdonságok változása a szerkezeti változások következtében – választ adni. A laboratóriumi mérésekből közelítőleg meghatároztam az **E** és **K** modulusokat, valamint eldöntöttem a tartó viselkedése közelítésének alapjait. Azaz:

- o a tartó teljes hosszán érvényes a Hook-törvény;
- o fenntartások nélkül alkalmazható Maxwell tétele;
- o az egységterhőre keletkező lehajlásokat a mért értékek arányosításával, a rugalmas csukló elfordulása miatti nyomatékváltozás figyelembevételével és mellőzésével egyaránt ki kell számítani.

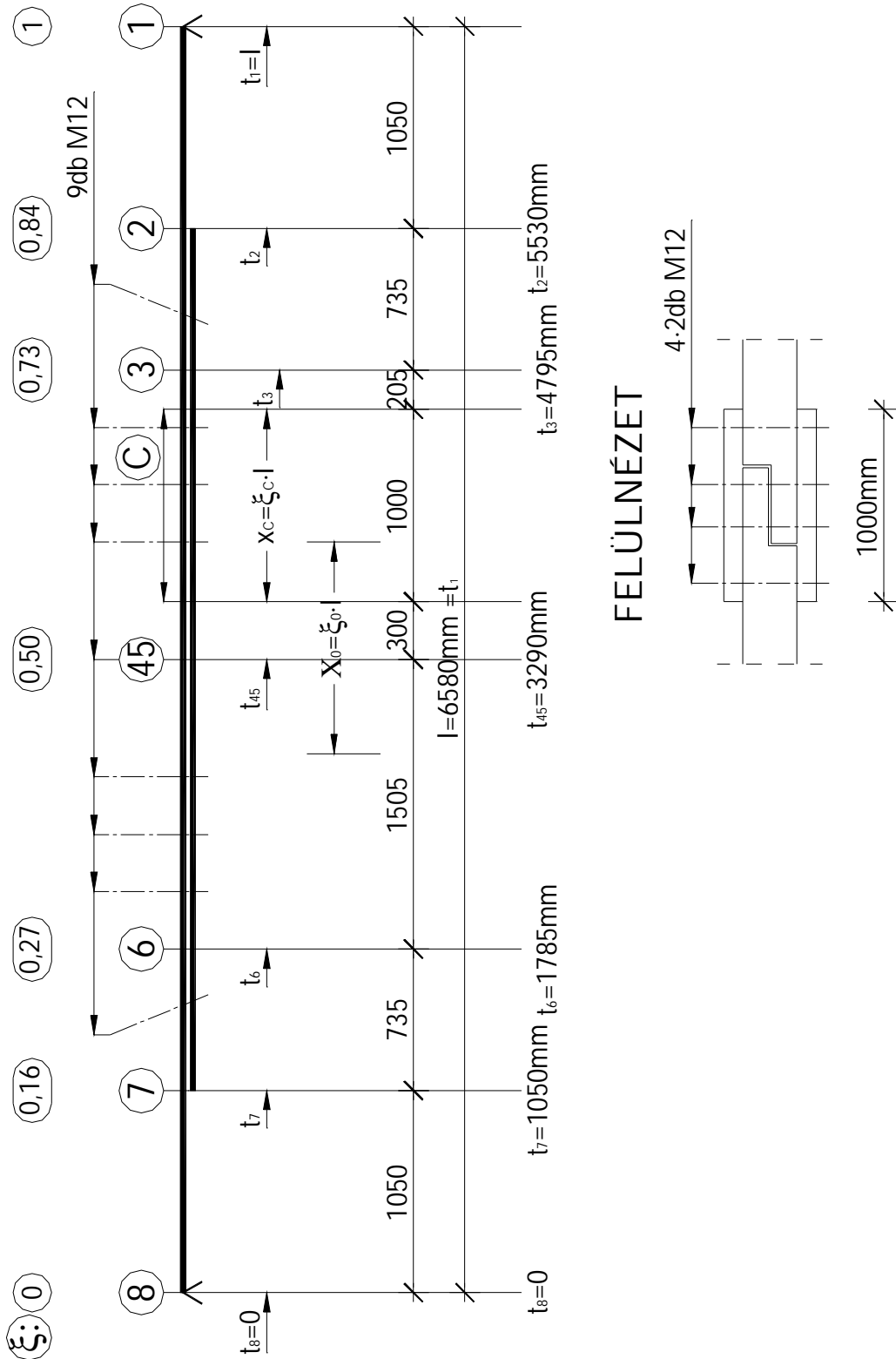


6. ábra

A rugalmas csukló modellezése

5.2. A KÖZBENSŐ SZAKASZÁN KÉTFÁS TARTÓ SZÁMÍTÁSA

5.2.1. A számítási modell felvétele



7. ábra

A számításoknál figyelembe vett geometria

A laboratóriumban felállított, a kísérleti jegyzőkönyvhöz (KJv.) mellékelt terv és a KJv. 3.ábrája szerint készített fatartó legegyszerűbb állapotában (kéttámaszú gerenda) mért lehajlásokat vizsgálom annak érdekében, hogy anyagjellemzőket tudjak a mérési eredményekből meghatározni. (5.01, 5.02 és 5.03 sz. mérések) Nevezetesen:

- a rostokkal párhuzamos **E** rugalmassági modulust,
- a középső – kétfás – szakaszon az összekapcsolt keresztmetszetek egymáson való elcsúszását jellemző **K** elcsúszási modulust, azaz az egységnyi eltolódáshoz szükséges csúsztatóerőt, ill. a γ^2 elcsúszási relációt.

Elvi lehetőség van a felső gerendában kialakított toldás miatti csuklóban létrejövő relatív elfordulás meghatározására is, ismeretlenek felvéve vagy az elfordulás q nagyságát, vagy az elfordulás miatti **M** nyomaték változását, vagy a csukló elfordulására jellemző **k** rugóállandót, azaz az egységnyi elforduláshoz szükséges nyomatékot.

A mért lehajlási eredmények nem szimmetrikusak. Ennek több oka van: az érzékelők kis mértékben ugyan, de nem szimmetrikusan voltak elhelyezve (pl. amiatt, hogy az elméleti támaszok a tartó két végén a gyakorlati értéktől nem egyformán térnek el), a gerenda toldásánál tényleg keletkezik egy relatív elfordulás, a keresztmetszetek, így az inerciák sem szimmetrikusak a tartó tengelye mentén, a relatív elcsúszás nem állandó és nem szimmetrikusan változik, azaz a minden tényleges körülményt figyelembe vevő modell nagyon nehezen írható le. A sok eltérés figyelembe vétele oda vezetett, hogy a lehajlások felírásából keletkező lineáris egyenletek kibogozhatatlan megoldásokat eredményeztek. A valóságos geometriát követő modellt a megoldhatóság érdekében ésszerűen egyszerűsíteni kellett!

5.2.1.1. A modell jellemzése

A mérési eredmények feldolgozásához alkalmazott statikai modell tulajdonságai:

- a szerkezet rugalmasan viselkedik, azaz érvényes Hook törvénye. Az elcsúszások arányosak a csúsztatóerővel, arányossági tényező a **K** rugóállandó, azaz az egységnyi relatív elcsúszáshoz szükséges csúsztatóerő.
- a felső gerenda toldása miatt kialakított rugalmas csuklóban keletkező elfordulások nyomatékkal arányosak, arányossági tényező a **k** rugóállandó, azaz az egységnyi elfordulást előidéző nyomaték. A csukló jellemzői ismeretlenek, és a csavarokban lévő tengelyirányú erő változásával módosulnak. Hatását legegyszerűbb az **M** nyomatékugrással figyelembe venni;
- a rugalmas viselkedés legalább annyit jelent, hogy tartószerkezet lehajlásainak matematikai leírása a rugalmasságtan segítségével gyakorlatban elfogadható eredményeket ad;

- a K elcsúszási modulus és a k rugóállandók nagysága nem függ a terheléstől;
- az E és a K a tartó tengelye mentén állandó. Ugyancsak szakaszonként (egyfás-kétfás) állandó a keresztmetszet is, valamint a tartó kialakítása (elvileg) szimmetrikus, a terhelés egy, a középső keresztmetszetben ható koncentrált függőleges erő;
- a nyíróerőből keletkező alakváltozási munka nagysága elhanyagolható, de az elérhető nagyobb pontosság érdekében azt is figyelembe vesszük.

A felsorolt feltételezések megfelelnek az általános gyakorlatnak, a szabványok engedélyeinek. Azonban a tervezés/ellenőrzés során alkalmazott modellnek nincs olyan kontrollja, amelynek során mért és számított értékeket egyeztetünk, mint esetünkben a lehajlásokat. (Hiszen így lehetséges ismeretlen értékek meghatározása.) Tehát minél inkább egyszerűsített a számítási modell, annál kevésbé kapunk valóság-hű eredményeket a K és az E modulusokra. Mi lehet az egyszerűsítés optimuma? Ennek megtalálása érdekében matematikai feltételt kell szabnunk.

5.2.2. A mért lehajlások kiszámítása (e_6 , e_{45} , e_3)

A két- ill. háromfás fatartókban keletkező igénybevételek és lehajlások meghatározásával a [PISCHL, R. 1968, 1969a, 1969b] és a [STÜSSI, F. 1971] foglalkozik a keresztmetszetek között rugalmas kapcsolatot és a keresztmetszeti és szilárdsági jellemzők állandóságát feltételezve. (A szerző kapcsolódik az ötvenes, hatvanas évek német nyelvű szakirodalmában az öszvértartókra vonatkozó megállapításokhoz/elméletekhez.)

A 6. és a 7. ábrán alkalmazott jelöléseket alkalmazva meghatározzuk esetünkben az igénybevételeket, valamint munkatételekkel – a nyíróerők munkáját sem elhanyagolva – a függőleges eltolódásokat a tartó három (\uparrow , „...”, f) pontjában. Egyidejűleg három mért lehajlásra kellett számított eredményt meghatározunk. Végig kellett követni, hogy a modell változtatásai mennyire/milyen mértékben befolyásolják az eredményeket, egyáltalán: melyik adat változtatásán célszerű gondolkodni? Jelölések és mennyiségek kétfás km. esetén:

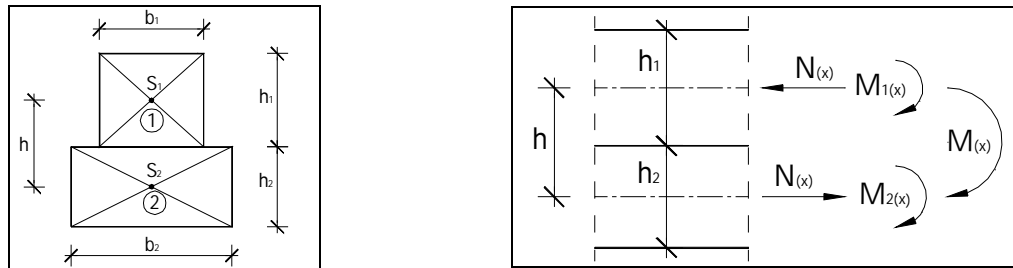
$$A_1 = b_1 \cdot h_1 \quad A_2 = b_2 \cdot h_2 \quad S_s = h \cdot \frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 + A_2} \quad I_1 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} \quad I_2 = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} \quad h = h_1/2 + h_2/2$$

$$I_s = I_1 + I_2 + h \cdot S_s \quad \alpha_i = \frac{3}{4 \cdot h_i} \cdot \gamma_i^2, \quad i = 1, 2 \text{ vagy } b, j$$

$$M_1(x) = [M(x) - N(x) \cdot h] \cdot \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad M_2(x) = [M(x) - N(x) \cdot h] \cdot \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$

A nyomatékok az egyes fák között az inerciák arányában oszlanak meg:

$$M_1(x) + M_2(x) = M(x) - N(x) \cdot h$$



8. ábra

A keresztmetszet geometriai jelölései és a hajlítónyomaték egyensúlyozása a kétfás szakaszon.

A kiinduló differenciálegyenlet és megoldása:

$$\frac{d^2 N(x)}{dx^2} - g^2 N(x) + a M(x) = 0^{25} \quad 5/$$

$N(x)$	$\frac{dN(x)}{dx} = T(x)$ csúsztatóerő	$M(x)$
normálerő		függ. síkú hajlító-nyomaték

$$\alpha = \frac{K}{E} \cdot \frac{h}{I_1 + I_2} \quad [1/mm^3] \quad \gamma^2 = \frac{K}{E} \cdot \frac{h}{I_1 + I_2} \cdot \frac{I_s}{S_s} \quad [1/mm^2] \quad K \cdot \Delta u = T(x)$$

$$K \quad [=] \quad N/mm^2$$

Feltételezzük, hogy az E [N/mm²] rostokkal párhuzamos rugalmassági modulus értéke a tartó tengelye mentén konstans.

$$N(x) = \int \frac{ch(g \cdot x) \cdot a \cdot M(x)}{g} dx \cdot sh(g \cdot x) + \int \frac{sh(g \cdot x) \cdot a \cdot M(x)}{g} dx \cdot ch(g \cdot x) + C_1 \cdot sh(g \cdot x) + C_2 \cdot ch(g \cdot x) \quad 6/$$

Avagy a hiperbolikus függvényeket az exponenciális függvénnyel kifejezve:

$$N(x) = C_1 \cdot e^{g \cdot x} + C_2 \cdot e^{-g \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a \left(\int e^{g \cdot x} \cdot M(x) dx - e^{2g \cdot x} \int e^{-g \cdot x} M(x) dx \right) e^{-g \cdot x}}{g}$$

Az integrálási állandókat az $N(x)$ függvény tulajdonságaiból adódó feltételekből tudjuk meghatározni, amelyek esetünkben az alábbiak:

- az $N(x)$ fv. a kétfás szakasz végein – $\xi = t_1/l$ és $\xi = t_2/l$ – zérus;
- a $\hat{=}$ és $\hat{,}$ szakaszokon, ahol a tartó keresztmetszete egy gerenda keresztmetszetével egyenlő, a tartó nem öszvér, ezért az $N(x)$ normálerő zérus;
- a normálerő ábrája a kétfás szakaszon – ideális esetben – szimmetrikus és folytonos, és a középkeresztmetszet környékén szélsőértéke van;
- mivel az egyfás szakaszokon az $N(x)$ fv. zérus, a kétfás szakasz végpontjain az $M(x)$ nyomatéki ábrának törése van.

Tudjuk, de mért és számított értékeink bizonyítják is, hogy egy tartó számított és mért viselkedé-

25 Az egyenlet megegyezik a 4. Összetett keresztmetszetű tartók c. fejezetben ismertetettel.

se mennyire eltér! A legpontosabb modell kell, mert célunk, hogy egységteherből számítsunk lehajlásokat. A lehajlásokat a külső és az alakváltozási munka egyenlőségéből határozzuk meg, azaz függvény-szorzatokat kell integrálnunk a tartó tengelye mentén. Az integrálást szakaszonként kell végeznünk, ugyanis minden változás ugrást vagy törést jelent a nyomatéki és/vagy a nyíróerő-függvényekben.

A 6. ábrán megadott inerciaváltozásokon kívül (ez ugrást jelent a belső alakváltozásokat leíró függvényekben) figyelembe kell vennünk, hogy

- a külső koncentrált erő a „ ... j. km.-ben terheli a tartót;
- virtuális egység-erő hat minden egyes km.-ben, ahol függ. eltolódást akarunk meghatározni (τ , „ ..., f);

A kísérleti tartót a számíthatóság érdekében idealizálni kell, ugyanis minden apró változást nem lehet/szükséges követni annak érdekében, hogy a kívánt tulajdonságok vizsgálhatók legyenek. A mi esetünkben a két fa közötti kapcsolatot nyomatékmérő kulccsal, becslést pontossággal lehetett beállítani, tehát kevésbé valószínű az, hogy az elcsúszást befolyásoló tényezők a tartó tengelye mentén állandóak voltak. (A csúszatóerőt részben felvevő csavarok meghúzója jelentette a **K** rugóállandó „beállítását”). A [PISCHL, R. 1968, 1969a, 1969b], a [HEILIG, R. 1953a, 1953b], a [KNEINDL, R. 1990] valamint [MÖHLER, K. 1986], a szabványok és a gyakorlat is konstans elcsúszást tételeznek fel a egyes keresztmetszeti részek között! – Esetünkben biztosan nem volt így. Ez a tervezés esetén nem jelent gondot. A mostani esetben – amikor valóságos értékeket akarunk elviekkel egyeztetni – ez már problémát jelent. Ezen identifikációs folyamat során a modellt úgy kell alakítanunk, hogy a lehető legpontosabban leírja a mért szerkezetet. Az identifikációs folyamata annál pontosabb, minél több összefüggést tudunk megfogalmazni a mért és a számított értékek között. A dinamikai mérések elméletileg végtelen sok egyenlet/összefüggés felírására adnak lehetőséget.

5.2.2.1. Az $N(x)$ görbe szakaszainak csatlakozási feltételei

Az alábbiakban az integrálási állandók meghatározására felírható kerületi feltételeket soroljuk fel a felrajzolt görbék sajátosságosaival.

Az elcsúszások mért értékeinek táblázataiban foglalt értékei úgy is feldolgozhatók, hogy az utadók jeleinek azon előjelét is figyelembe vesszük, amelyek különbséget tesznek abban, hogy a relatív elcsúszást mihez képest mérik. Az M2. ábrát tanulmányozva az látjuk, hogy állapotonként és erőnként van egy szélsőérték hely és egy csomópont, ahol a görbék egymást metszik. Ezeket az M9., M10., M11, M12. táblázatban meg is adtuk, kijelölve ezzel az elcsúszó felületen a szerkezet két jellemző keresztmetszetét.

A fenti táblázatok alapján is az a következtetés vonható le, hogy mindegyik állapotban egységes viselkedést mutatnak a 15, 20, 25, 30, 35 kN – a 4 j. tartónál a 15, 20, 25 kN – nagyságú erőre mért értékek, tehát a továbbiakban csak az ezen terhelésekhez tartozó eredményeket figyeljük. **Csomópontok:**

- az elcsúszások jobboldali zéruspontja, a legszélső jobboldali átmenő (ferde) csavar közepe, $\xi=0,758$;
- a relatív elcsúszások zéruspontja: M9., M10. táblázat
- az elcsúszások baloldali zéruspontja M11. és M12. táblázat.

Az 5/ j. egyenletből az $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ normálerőket lehet meghatározni. Ezek az erők csak a kétfás szakaszon vannak, egyébként értékük nulla. A kezdeti nyomatóéki ábra szakaszaihoz igazodva, az $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ ábrát három szakaszból állítottam össze. (b , k és j j. szakaszok). Az $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ függvény egyes szakaszai az alábbiak szerint csatlakoznak egymáshoz:

- $\mathbf{N}_b(\mathbf{x})$ fv.: a t_7 km.-ben értéke zérus és a tartó középtáján szélsőértéke van. Szimmetrikus kialakítású és terhelésű tartón az elcsúszások és a normálerők is szimmetrikusak, ebből következik, hogy az $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ erőnek a két zéruspontja között – ideális esetben középen – szélsőértéke van. Azaz:

$$1/ N_b(x) = 0, \text{ ha } x = t_7 \quad \text{és} \quad 2/ dN_b(x) = 0, \text{ ha } x = x_0 \cdot \mathbf{N}_{gb}(\mathbf{x})$$

- $\mathbf{N}_k(\mathbf{x})$ fv.: a t_{45} km.-ben ($x = x_0$) csatlakozik a baloldali szakaszhoz. Itt szélsőértéke van, amely a baloldali szakasz itteni értékével megegyezik. Azaz:

$$3/ N_k(x) = N_b(x), \text{ ha } x = t_{45} \quad \text{és} \quad 4/ dN_k(x) = 0, \text{ ha } x = x_0 \cdot \mathbf{N}_{gk}(\mathbf{x})$$

- $\mathbf{N}_j(\mathbf{x})$ fv.: a csukló feltételezett km.-énél csatlakozik a középső szakaszhoz, de a két szakasz értéke ezen km. alatt csak akkor egyezik meg, ha a csukló nem fordul el, azaz a tartó nem toldott. Ezért itt nem írható elő feltétel, ugyanis az érintőazonosság előírása furcsa görbét eredményezett. Ha ez a görbeszakasz lenne érvényes a középső pontban is, az érintője zérus lenne. A kétfás szakasz végén, a t_2 km.-ben a fv. értéke zérus.

$$5/ N_j(x) = 0, \text{ ha } x = t_2 \quad \text{és} \quad 6/ dN_j(x) = 0, \text{ ha } x = x_0 \cdot \mathbf{N}_{gj}(\mathbf{x})$$

Mindhárom görbeszakasz alapvető tulajdonsága, hogy ha teljes szakaszon érvényesek lennének, akkor mindegyiknek középen lenne szélsőértéke. (A szélsőérték x_0 helyének eltolódását nem tudtam figyelembe venni, ugyanis a görbéket így nem lehetett illeszteni, ehhez a három mért feltétel kevés volt. Tehát $x_0 = (t_2 - t_7)/2$). – Ideális esetben persze a szimmetria is teljes lenne a vizsgált tartón – vagy ha nem is szimmetria, de a pontosan meghatározott modellen mindennek konkrét helye/keresztmetszete van –, de a pontos matematikai leíráshoz a meglévőknél több mért feltétel kellene.)

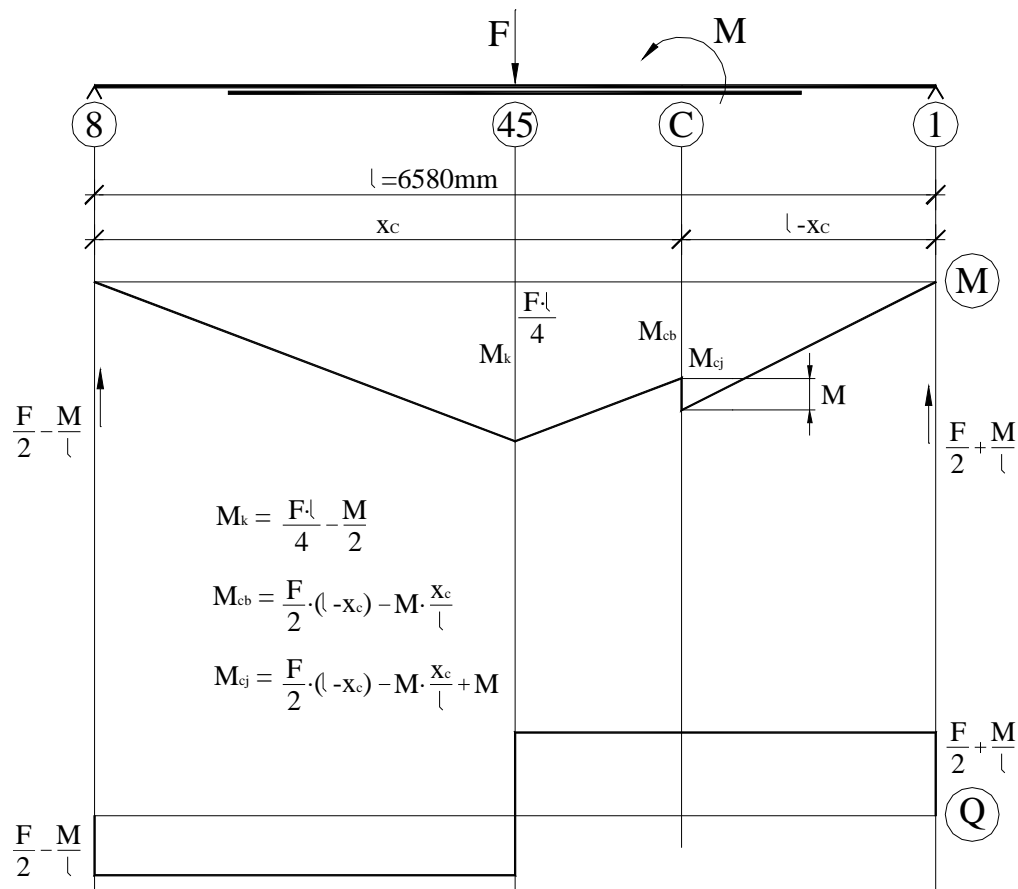
A fenti 3x2 feltétel segítségével meghatároztuk a három szakasz integrálási állandóit. A szakaszok illeszkednek egymáshoz, és folytonos görbét kapunk akkor is, ha nincs rugalmas csukló, azaz az M koncentrált nyomaték zérus.

Az M4. ábra szerint a szimmetria felborult, nem mindegyik elvileg szimmetrikus helyeken lévő km. viselkedik azonos módon, mások a lineáris szakaszok. A növekvő terheléshez növekvő elcsúszás tartozik, de a középső pont a többiekhez képest eltérően viselkedett. A matematikailag is feldolgozott ábrák jellemzői azt mutatják az M3., M4. M5. és M6. táblázatban, hogy semmilyen szempontból nem volt szimmetria, eltérnek a szélsőértékek helyei, és az arányossági tényezők is.

A fentiek következménye esetünkben az, hogy az azonos kerületi feltételek állapotonként és terhelő erőnként más-más km.-ben lesznek érvényesek. (M9., M10., M11. és M12. táblázat) Ezt a MAPLE matematikai programmal aránylag könnyen lehetett követni, de ezek figyelembe vétele el is lehetetlenítette a probléma megoldását.

5.2.2.2. Igénybevételek a külső teherből

5.2.2.2.1. $M(x)$ nyomatékok és $Q(x)$ nyíróerők az F külső teherből



9. ábra

A külső teherből keletkező igénybevételek

A 9. ábra mutatja a középső km.-ben működő F koncentrált erőből keletkező hajlítónyomatékok és nyíróerők vonalát. Az igénybevételek függvényei, amelyek segítségével a külső és belső munka egyenlősége alapján meghatároztuk a lehajlásokat:

$$\begin{aligned}
 M_b(x) &= \frac{F}{2} - \frac{M}{l} \times x & \frac{l}{2} \leq x \leq x_c & & M_j(x) &= \frac{F}{2} + \frac{M}{l} \times (l - x) \\
 0 \leq x \leq \frac{l}{2} & & M_k(x) &= -\frac{F}{2} \times (l - x) + \frac{F \times l + 2M}{2l} \times x & & x_c \leq x \leq l \\
 Q_b(x) &= \frac{F}{2} - \frac{M}{l} & Q_k &= \frac{F}{2} + \frac{F \times l + 2M}{2l} & & Q_j &= -\frac{F}{2} + \frac{M}{l}
 \end{aligned}$$

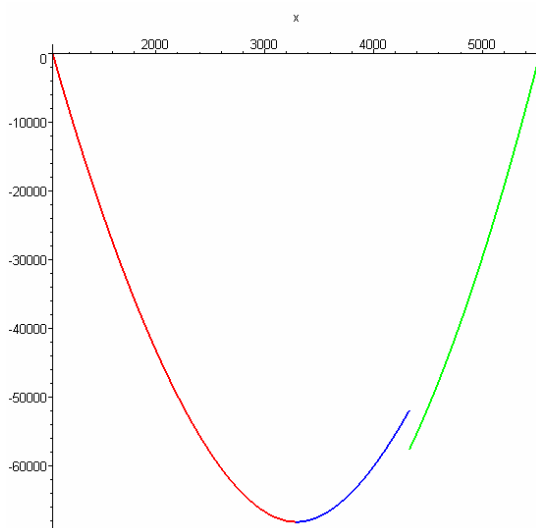
5.2.2.2.2. Az N(x) normálerőfüggvény

Meghatározásához szakaszonként be kell helyettesíteni az M(x) fv.-t az 1/ egyenletbe, és szakaszonként rajzoljuk fel az ábrát.

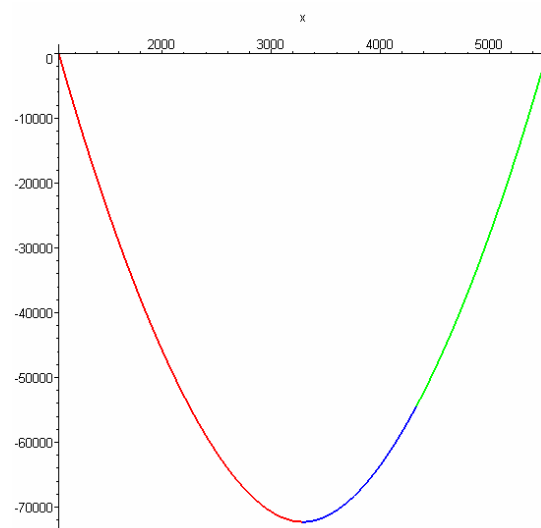
Az 1/ j. differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned}
 N_{gb}(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{g^2} \times F \times x + C_1 \times \sinh(g \times x) + C_2 \times \cosh(g \times x) \\
 t_7 \leq x \leq x_0 & & \text{avagy exponenciális fv. - el kifejezve} \\
 N_{gb}(x) &= C_2 \times e^{gx} + C_1 \times e^{-gx} - \frac{1}{2} \times \frac{a(-F \times l + 2 \times M) \times x}{g} \\
 x_0 \leq x \leq x_c & & N_{gk}(x) &= C_4 \times e^{gx} + C_3 \times e^{-gx} - \frac{1}{2} \times \frac{a(-F \times l^2 + F \times l \times x + 2 \times M \times x)}{g^2 \times l} \\
 x_c \leq x \leq t_2 & & N_{gj}(x) &= C_6 \times e^{gx} + C_5 \times e^{-gx} - \frac{1}{2} \times \frac{a(F \times l + 2 \times M) \times (-l + x)}{g^2 \times l}
 \end{aligned}$$

A számítás részleteit l. a Mellékletben!



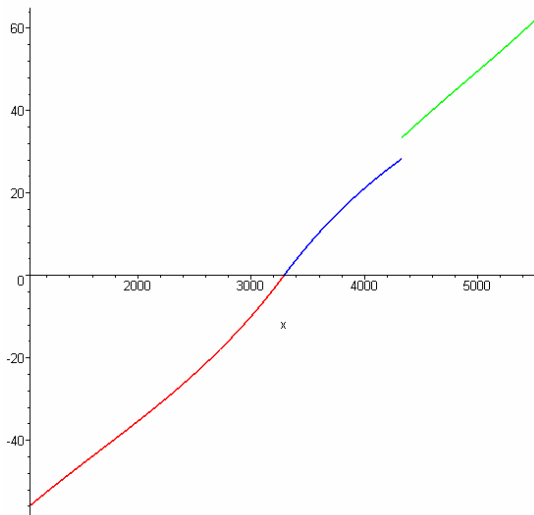
Az N(x) ábra esetünkben, amikor a csukló elfordul, tehát $M \neq 0$



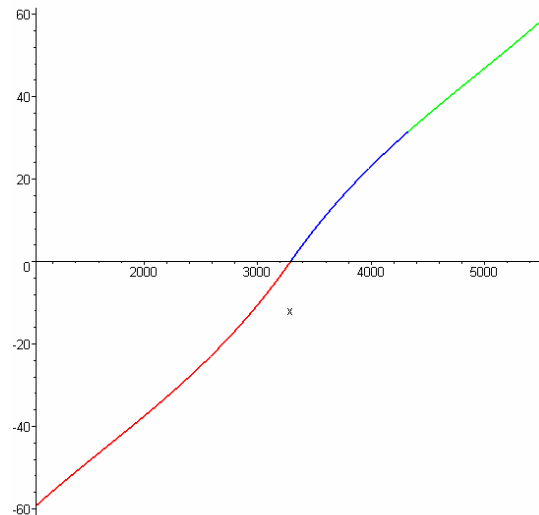
Az N(x) ábra a toldás nélküli tartó esetében, azaz $M = 0$.

5.2.2.2.3. A csúsztatóerők $T(x)$ függvénye az öszvértartón

$$\frac{dN(x)}{dx} = T(x)$$



$M \neq 0$



$M = 0$

$T(x)$, a csúsztatóerők ábrája

5.2.2.2.4. Az öszvértartó $M_g(x)$ nyomatékfüggvénye

Az öszvértartóban a külső terhekből keletkező függ. síkú hajlítónyomatékokat a normálerő csökkenti az alábbiak szerint:

$$M_g(x) = M(x) - N(x) \cdot h$$

Az $M_g(x)$ fv.-t az $M(x)$ fv. szakaszolásának megfelelően kell felírni, ugyanis az $N(x)$ fv. folytonos, így nem befolyásolja az integrálás határait.

$$0 \leq x \leq t_7$$

$$t_7 \leq x \leq l/2$$

$$l/2 \leq x \leq x_c$$

$$M_g(x) = M_b(x)$$

$$M_g(x) = M_b(x) - h \times N_b(x)$$

$$M_g(x) = M_k(x) - h \times N_k(x)$$

$$x_c \leq x \leq t_2$$

$$t_2 \leq x \leq l$$

$$M_g(x) = M_j(x) - h \times N_j(x)$$

$$M_g(x) = M_j(x)$$

A normálerő h karjának értékét a Melléklet 1.4.1. pontja tartalmazza:

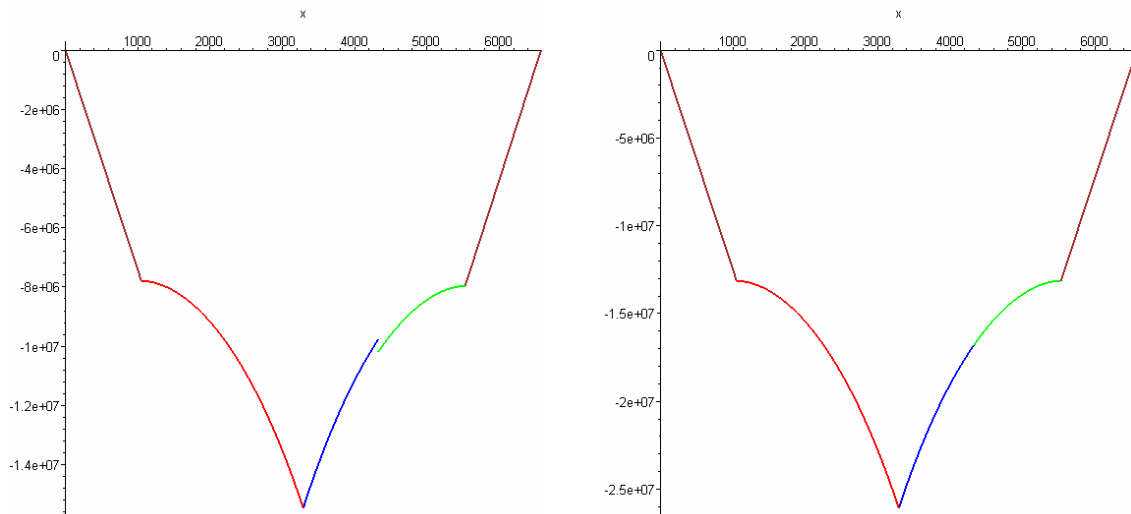
- a felső és az alsó gerenda súlypontjai közötti távolság

a bal oldalon: $h_b = 210,9$ mm – a jobb oldalon: $h_j = 219,4$ mm

- az alsó és felső km. átlagos magassága és átl. szélessége a kétfás szakaszon

$$h = 208,11$$
 mm $b = 207,5$ mm

Helyettesítsünk konkrét és a feladat szempontjából reális értékeket a fenti egyenletekbe, és ábrázoljuk az $M_g(x)$ fv.-t!



$M_g(x)$, a hajlítónyomatékok ábrája

$M \neq 0$

$M = 0$

5.2.2.2.5. Az öszvértartó $Q_g(x)$ nyírőerőfüggvénye

A nyírőerőket leíró függvény a kis szakaszon vett nyomatékváltozás fajlagos értékének ellentett-

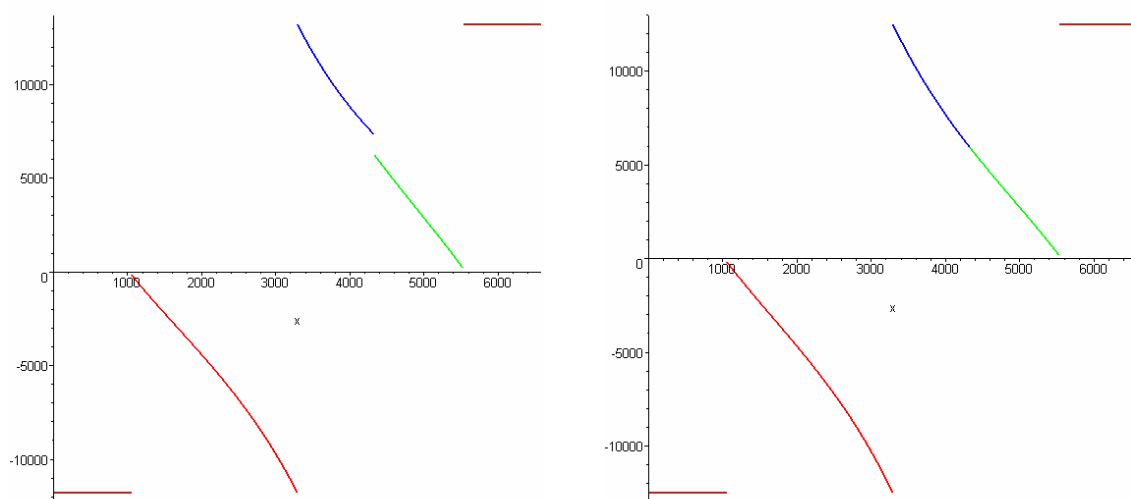
je, azaz

$$\frac{dM_g(x)}{dx} = -Q_g(x).$$

A nyírőerők függvényeit nem soroljuk fel, de megtalálhatók a Mellékletben. A kétfás szakasz mindkét végén (t_7 és t_2 km.) olyan az ábra, mintha koncentrált erő hatna mindkét helyen. Ez nincs így, de a közel zérus érték matematikailag érthető, ugyanis a két km. fölött a nyomatéki ábra vonalához húzható érintő majdnem vízszintes.

A nyírőerőfüggvényeknél a fenti képlet szerinti előjelet vesszük figyelembe.

Helyettesítsünk konkrét és a feladat szempontjából reális értékeket a fenti egyenletekbe, és ábrázoljuk a gerenda nyírőerőinek ábráját:



$Q_g(x)$, a nyírőerők ábrája

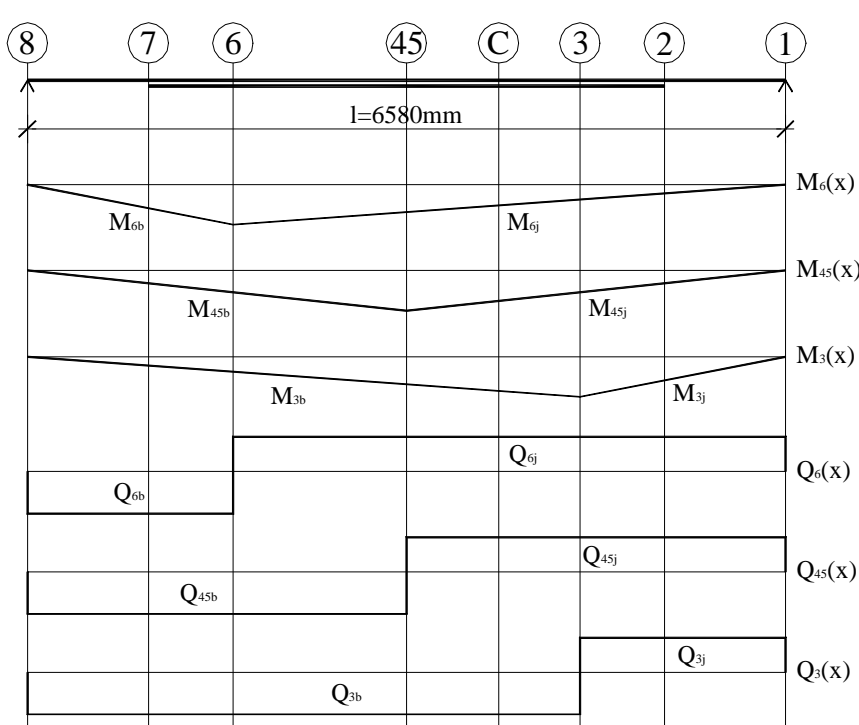
$M \neq 0$

$M = 0$

5.2.2.3. Igénybevételek a virtuális erőkből

Virtuális egységerőt azon pontokban veszünk fel, ahol a lehajlásokat mértük. Azaz a \dagger , a „...”, és a f j. keresztmetszetekben. Az egységerőkből keletkező hajlítónyomatékokat nyilván befolyásolja a toldás. Ez relatív elfordulást tesz lehetővé, emiatt rugalmas csuklóként modellezzük. Ismeretlennek tekintjük az eltolódást növelő elfordulással arányos \mathbf{M} nyomatékváltozást, és az emiatt módosuló alakváltozási munkát számoljuk. Ez a nyírásból keletkező alakváltozási munkával összemérhető.

$M_{6b}(x) = \frac{l - t_6}{l} \times x$	$0 \leq x \leq t_6$	$t_6 \leq x \leq l$	$M_{6j}(x) = \frac{t_6}{l} \times (l - x)$
$M_{45b}(x) = \frac{1}{2} \times x$	$0 \leq x \leq t_3$	$\frac{1}{2} \leq x \leq l$	$M_{45j}(x) = \frac{1}{2} \times (l - x)$
$M_{3b}(x) = \frac{l - t_3}{l} \times x$	$0 \leq x \leq t_3$	$t_3 \leq x \leq l$	$M_{45j}(x) = \frac{1}{2} \times (l - x)$
$Q_{6b}(x) = -\frac{l - t_6}{l}$	$0 \leq x \leq t_6$	$t_6 \leq x \leq l$	$Q_{6j}(x) = \frac{t_6}{l}$
$Q_{45b}(x) = -\frac{1}{2}$	$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq x \leq l$	$Q_{45j}(x) = \frac{1}{2}$
$Q_{3b}(x) = -\frac{l - t_3}{l}$	$0 \leq x \leq t_3$	$t_3 \leq x \leq l$	$Q_{3j}(x) = \frac{t_3}{l}$



10. ábra
A virtuális erőkből meghatározott igénybevételi ábrák.

5.2.2.4. A lehajlások meghatározása

Három pontban mértem lehajlásokat, számítani is ezen pontokban kell, hogy a mért és számított értékek egyenlőségéből anyagjellemzőket tudjunk meghatározni. – A számítást a $W_b = W_k$ azonosság alapján végezzük. Figyelembe vesszük a nyírási alakváltozási munkát is.

A [RÓNAI F.– SOMFALVI GY., 1982] szerint faszerkezeteknél a nyírási alakváltozás a hajlításból keletkező alakváltozás akár 30 %-át is elérheti, amennyiben a tartó H magassága nem kisebb, mint az L támaszköz tizede. De akkor is indokolt figyelembe vennünk, ha a H/L arány ugyan kisebb, mint $1/10$, de a lehajlások pontos ismerete szükséges. A [CHOLNOKY T., 1966] gyakorlatilag ugyanezt mondja azzal a fogalmazással, hogy figyelembe kell vennünk a nyírási alakváltozást, ha a tartó magassága szokatlanul nagy, vagy számít a nyírási alakváltozás. Azaz esetünkben is figyelembe kell vennünk a nyíróerő okozta alakváltozásokat, mert a lehajlások minél pontosabb felírása szükséges. Általánosságban egy pont lehajlását a munkatételek segítségével az alábbi összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$w_k = \int_{x=0}^l M_g(x) \cdot \frac{M_k(x)}{E \cdot I} \cdot dx + \rho \cdot \int_{x=0}^l Q_g(x) \cdot \frac{Q_k(x)}{G \cdot A} \cdot dx$$

A fenti képlet ismeretlenként tartalmazza a E rugalmassági modulus, a g elcsúszásra jellemző értéket (az $M_g(x)$ –ben és a $Q_g(x)$ –ben), valamint a rugalmas csukló elfordulása miatti, az $x = x_c$ helyen fellépő M nyomatékcsökkenést. A f , „...”, és a \dagger j , km.-ek mért függ. eltolódása három ismeretlen mennyiség meghatározását teszi lehetővé. Természetesen a g , az E , és az M a természetes ismeretlenek, de sajnos sem a hiperbolikus függvények argumentumában, sem az exponenciális fv. kitevőjében lévő ismeretlen mennyiséget nem tudja eredményesen kezelni a MAPLE matematikai program. (Azt pedig egy próbálkozás után elvettem, hogy az ismeretleneket hagyományos módon határozzam meg.) Az elcsúszásra jellemző g értéket az 5.1.1.1. pont alapján felvettem az ott megjelölt

$$0,00060 \text{ 1/mm} < g < 0,00075 \text{ 1/mm}$$

értékek között. Megállapítható, hogy a három állapotban, a 6, 4 és a 2 jelűben, az ugyanakkora erőre mért lehajlások aránya nem azonos.

A lehajlások elemzésével a g^2 elcsúszási relációt, ill. annak gyökét, az elcsúszásra jellemző g értéket az alábbiak szerint vettem figyelembe:

- 6 j. állapot, azaz a gerendák egymáson való elcsúszását akadályozó csavarokat 6 kpm nyomatékkal húztuk meg. $g = 0,000720 \text{ 1/mm};$
- 4 j. állapot, azaz a gerendák egymáson való elcsúszását akadályozó csavarokat 4 kpm nyomatékkal húztuk meg. $g = 0,000650 \text{ 1/mm};$

- 2 j. állapot, azaz a gerendák egymáson való elcsúszását akadályozó csavarokat 2 kpm nyomatékmal húztuk meg. $g = 0,000620 \text{ 1/mm}$.

Mindegyik esetben vizsgáltam az illesztésben elhelyezett vízsz. tengelyű csavarok meghúzásának állapotát is (szintén 6, 4, 2). Mivel egy tényleges illesztés nyomatékbírása változhat, az ezen esetekben kapott értékeket átlagoltam.

Ha a rugalmassági modulust közvetlenül meghatároztam, a kapott eredmények nagyon szórtak, ugyanis tartalmaztak egy, az inerciát csökkentő tényezőt. Az egyfás szakaszok K_1 hajlítási merevsége az ismert inerciák (I_{21} és $I_{87} = k_1 I_{21}$) miatt alkalmas az E_h rugalmassági modulus kiszámítására. A rugalmassági modulust a számításokból megbecsültem, értéke

$$E_h = 4400 \text{ N/mm}^2.$$

A nyírási rugalmassági modulust közelítő értékkel vettem figyelembe, azaz $G_h \approx E_h/20$, tehát

$$G_h = 220 \text{ N/mm}^2, G = G_h.$$

A kétfás szakasz a K hajlítási merevsége tartalmazza az E_h rugalmassági modulust, az ismert inerciákat (I_b és $I_j = k \cdot I_b$), valamint a kétfás km.-ek inerciáit módosító a_I tényezőt. (A két fa egymáson való elcsúszása miatt az összetett km.-ek tehetelenségi nyomateka csökken, és a hajlítási merevség csökkenésének mértékét fejezi ki az a_I). Nem azonos pontosságú a szélső keresztmetszetekben valamint a középső km.-ben számítható lehajlás értéke (e_{3sz} és e_{6sz} , valamint e_{45sz}). Ezért felvettem ismeretlenként a középső km. lehajlásainak korrekcióját is, tehát a középső km. számított lehajlása $\sim \cdot e_{45sz}$. Mivel a toldás miatti relatív elfordulás nyomatek hatására keletkezik, de nem ismerjük a rugóállandót, így a hajlítónyomatek M változását kell még ismeretlennek tekintenünk.

$$K_1 = E_h \times I_{21} \quad K = E_h a_I I_b$$

Tehát az ismeretlen mennyiségek: M, a_I, \sim

A végleges megoldáshoz egy iteráció vezetett, azaz az először meghatározott értékekkel kiszámítottam a lehajlásokat, és ezeket viszonyítottam a mért lehajlásokhoz. A viszonyszám: $\bullet_0 = e_m/e_{sz}$. A viszonyszámmal módosítottam az összetett km. tehetelenségi nyomateka csökkenését kifejező korrekciós tényezőt: $\bullet = a_I/b_0$. Ezzel korrigálva az inerciát, az előző eredménynél pontosabbat kaptam, azaz a másodszorra számított lehajlások jobban közelítik a mért lehajlásokat, $\bullet = e_m/e_{sz}$, így az $|1 - \beta|$ a $|1 - \beta_0|$.

A számítás sorrendje és eredményei:

- munkatétellel meghatározom a három pont lehajlását a hajlításból, a nyírásból, majd összegüket: $e_h, e_n, e_h + e_n$;

- egyenlővé tettem a számított teljes lehajlásokat a mért lehajlásokkal. Ismeretlen értékek: M , a_I , f . Ezeket kiszámítottam;
- a nyírásból és a hajlításból meghatároztam a lehajlásokat, majd a $\bullet_0 = e_m/e_{sz}$ viszonyszámot és a korrigált csökkentő tényezőt: $\bullet = a_I/b_0$;
- kiszámítottam a végleges hajlítási merevséget: $K = n \times E_h \times I_b$;
- újra kiszámítottam a lehajlásokat, egyeztettem a mért értékekkel, és meghatároztam a végleges viszonyszámot, a számított és a mért értékek arányát. Ez a szám 1 körüli érték, 0,97 – 1,03 közé esik.

Tehát a mindennapi pontossággal épített gerenda viselkedését jól meghatározott kis hibával sikerült leírni. A dinamikus tulajdonságok meghatározásához ki kell még számítanunk az egységteherből keletkező lehajlásokat.

Az $M(x)$ és a $Q(x)$ értékeit a 2.2.2.2.1., a $M_g(x)$ értékeit a 2.2.2.2.4., a $Q_g(x)$ értékeit a 2.2.2.2.5. pont tartalmazza. A számítás részletei a Melléklet 4. pontjában olvashatók.

Geometriai mennyiségek (Melléklet 1.4.1. pont):

$$I_{21} \quad I_{87} \quad I_b \quad I_j \quad A \quad r = 1,2 \text{ (négyzetögm.)}$$

A f j. pont lehajlása: $e_3 = e_{3h} + e_{3n}$.

A részintegrálok határai: $t_7 \text{ ® } t_{45}, t_{45} \text{ ® } t_c, t_c \text{ ® } t_3, t_3 \text{ ® } t_2$

$$e_{3h} = \int_{x=0}^{t_7} M_b(x) \cdot \frac{M_3(x)}{k_1 \cdot K_1} \cdot dx + \sum_2^5 \int_{x=t_7}^{t_2} M_g(x) \cdot \frac{M_3(x)}{k \cdot K} \cdot dx + \int_{x=t_2}^l M_j(x) \cdot \frac{M_3(x)}{K_1} \cdot dx$$

$$e_{3n} = \rho \cdot \left(\int_{x=0}^{t_7} Q_b(x) \cdot \frac{Q_3(x)}{G \cdot A} \cdot dx + \sum_2^4 \int_{x=t_7}^{t_2} Q_g(x) \cdot \frac{Q_3(x)}{G \cdot 2 \cdot A} \cdot dx + \int_{x=t_2}^l Q_j(x) \cdot \frac{Q_3(x)}{G \cdot A} \cdot dx \right)$$

Megjegyzés: t_7 és t_{45} között $k = 1$!

A „ ... j. pont lehajlása: $e_{45} = (e_{45h} + e_{45n}) \cdot f$

A részintegrálok határai: $t_7 \text{ ® } t_{45}, t_{45} \text{ ® } t_c, t_c \text{ ® } t_2$

$$e_{45h} = \int_{x=0}^{t_7} M_b(x) \cdot \frac{M_{45}(x)}{k_1 \cdot K_1} \cdot dx + \sum_2^4 \int_{x=t_7}^{t_2} M_g(x) \cdot \frac{M_{45}(x)}{k \cdot K} \cdot dx + \int_{x=t_2}^l M_j(x) \cdot \frac{M_{45}(x)}{K_1} \cdot dx$$

$$e_{45n} = \rho \cdot \left(\int_{x=0}^{t_7} Q_b(x) \cdot \frac{Q_{45}(x)}{G \cdot A} \cdot dx + \sum_2^3 \int_{x=t_7}^{t_2} Q_g(x) \cdot \frac{Q_{45}(x)}{G \cdot 2 \cdot A} \cdot dx + \int_{x=t_2}^l Q_j(x) \cdot \frac{Q_{45}(x)}{G \cdot A} \cdot dx \right)$$

A \dagger j. pont lehajlása:

$$e_6 = e_{6h} + e_{6n}.$$

A részintegrálok határai:

$$t_7 \text{ ® } t_6, t_6 \text{ ® } t_{45}, t_{45} \text{ ® } t_c, t_c \text{ ® } t_2$$

$$e_{6h} = \int_{x=0}^{t_7} M_b(x) \cdot \frac{M_6(x)}{k_1 \cdot K_1} \cdot dx + \sum_2 \int_{x=t_7}^{t_2} M_g(x) \cdot \frac{M_6(x)}{k \cdot K} \cdot dx + \int_{x=t_2}^l M_j(x) \cdot \frac{M_6(x)}{K_1} \cdot dx$$

$$e_{6n} = \rho \cdot \left(\int_{x=0}^{t_7} Q_b(x) \cdot \frac{Q_6(x)}{G \cdot A} \cdot dx + \sum_2 \int_{x=t_7}^{t_2} Q_g(x) \cdot \frac{Q_6(x)}{G \cdot 2 \cdot A} \cdot dx + \int_{x=t_2}^l Q_j(x) \cdot \frac{Q_6(x)}{G \cdot A} \cdot dx \right)$$

A mérés és a számítás eredménye a korrekciók nélkül jobban közelítették volna egymást, ha nagyobb terheléseket (is) választok. A vizsgált gerenda várható határterhe egy, a közepső km.-ben támadó koncentrált erő esetén legalább 70 kN, azaz az alkalmazott terhelésből keletkező szélsőszál-feszültségek legfeljebb a harmadát érték el a szabványos határfeszültségnek, ami pedig a rugalmas viselkedés alatt van.

A Melléklet M13., M14. és M15. táblázata tartalmazza a mért lehajlásokat, az M8.ábrán pedig öt pont alapján felrajzoljuk a lehajlási ábrákat egy középen terhelő koncentrált erőre.

Az összes állapotban, de az illesztés figyelembe vétele nélkül meghatároztam egy, a lehajlások egyenlőségét adó osztószámot, egy csökkentő tényezővel szorzott rugalmassági modulust azt megvizsgálándó, hogy ez a szám hogyan illeszkedik a próbagerendákon kapott eredményekhez, a **4517 N/mm²** (1.1.1.2. pont), a **3256 N/mm²** (1.1.2.1 pont) és a **4745 N/mm²** (1.4.4. pont) értékekhez. A mért lehajlások vizsgálata során eredményként kapott értékek átlaga 7916 N/mm². Legyen most a csökkentő tényező a szabványosnál kisebb, $\alpha_I = 0,55$. A szorzatot kerekítve kaptam az alkalmazott rugalmassági modulust: **$E_h = 4400 \text{ N/mm}^2$** . Ez a szám illik a korábbi hajlítási próbák során kapott értékek közé.

A lehajlásokat a tartó 4-6600, 4-6400, 4-6200 j. állapotaiban csak a 15, 20, 25 kN erőre számítjuk ki, mivel a lineáris viselkedés egységesen csak ezen terhekre feltételezhető (M6.ábra). Tehát állapotonként kapunk minden keresett mennyiségre legalább kilenc értéket, és ezekből határozzuk meg a továbbiakban érvényesnek tekintett **M , f** és a_I számokat.

A terhelő erő és a vizsgált mennyiségek közötti összefüggés nem lineáris. A további számítások érdekében ezen összefüggést meg kell határoznunk. Mivel ez csak közelítés lehet, a hajlékonysági mátrix számítással meghatározott elemei és a mért értékek eltérő pontosságúak lesznek.

Lineáris viszont a lehajlások és a terhelő erő közötti arány a vizsgált határok között. Ezen eredményt akkor fogjuk felhasználni, amikor a hajlékonysági mátrix nem mért elemeit számítjuk ki.

A nyíróerő okozta alakváltozások nagysága a hajlításból keletkezőkhöz képest a vártnak megfelelően kicsi. (Azonban a mért és számított alakváltozások pontos egyezőségéhez ezeket is ki kellett számítanunk.) Értékük a teljes alakváltozáshoz viszonyítva 5 % körül van. Az egyes keresztmetszetekben kiszámított alakváltozásokat a korábban felsorolt M , a_I , f , b , \bullet értékekkel együtt a Melléklet M20., M21, M22. sz. táblázatai tartalmazzák.

5.2.2.5. A további vizsgálatokhoz szükséges eddigi eredmények
Statikus mérések eredményeinek feldolgozásával az alábbi eredményeket kaptuk a további vizsgálódások számára:

- a részben kétfás hajlított gerendatartó igénybevételeinek és mozgásainak meghatározására szükséges összefüggések;
- a gerenda pontosnak tekintett statikai vázát a rugalmas csukló, valamint normálerők szélsőértékének helyével: $x_C = 0,658$ és $x_0 = 0,5$, de ezt az $N(x)$ fv. leírásánál nem lehetett figyelembe venni. A gerendák mért elcsúszásainak x_0 értékeit az Melléklet M11. és M12. táblázata tartalmazza;
- az E és G rugalmassági modulusok értéke: $E = 4400 \text{ N/mm}^2$ és $G = 220 \text{ N/mm}^2$;
- a K elcsúszási modulus meghatározásához szükséges g szám a szerkezet egyes állapotaiban: $g_6 = 0,00072$; $g_4 = 0,00065$; $g_2 = 0,00062 \text{ 1/mm}$;
- a rugalmas csukló elfordulása miatti M nyomatécsökkenés értékét állapotonként és terhelésenként;
- megvizsgáltuk a nyírási alakváltozások nagyságát. Arra a közismert tényre jutottunk, hogy a nyíróerők munkájából keletkező lehajlások a teljes lehajlás 5-6 %-ára tehetőek (M20., M21., M22. táblázat);
- mivel a gyenge öszvérkapcsolat leírására nem elegendő az elcsúszásra jellemző g szám, az inerciák változtatása is szükséges a lehajlások pontos meghatározása érdekében. Ezen számok (általában az a_I , ill. ennek korrigált értéke a \bullet), az erő és nyilván a g függvényében változnak, és a változásuk nem lineáris. – Ismert értékeik alapján határozhatunk meg lehajlásokat. A hajlékonysági mátrix mérésrel meghatározott és nem meghatározott értékeit is. Nyilván erre a mért értékek terhelő erővel osztott értékei biztosítják az ellenőrzést. Ez is a linearitás feltételezése.

Az eddigiek során $\pm 3-4$ % hibával dolgoztunk. A nem nagyobb hiba elérését a továbbiakban is követelményként állítjuk.

6. A DINAMIKAI VIZSGÁLAT

6.1. TÖMEGMÁTRIX

A 3.1.3.1. pontban található az $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ tömegmátrix (kg):

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.225 & 0 & 0 \\ 0 & 76.104 & 0 \\ 0 & 0 & 75.154 \end{bmatrix}$$

6.2. A MEREVSÉGI MÁTRIXOK SZÁMÍTÁSA

A csillapítatlan rendszer dinamikai viselkedését leíró egyenlet megoldásához a merevségi mátrix meghatározása szükséges még. A Melléklet 4.2. pontja tartalmazza a hajlékonysági mátrixokat. A lenti, 6.táblázatban csak a végeredményeket közlöm.

A középső oszlopot a három kiszámított lehetőség közül az alábbiak szerint választottam ki:

- sem elméleti, sem különösebb gyakorlati érvet nem találtam, ami eldöntötte volna, hogy a hajlékonysági mátrixot az M23. táblázat melyik szerinti középső oszloppal írom fel;
- emiatt minegyikkel felírtam, és ezekkel számításokat végeztem. A kapott sajátfrekvenciákban nem voltak olyan tendenciák, amelyek alapján egyértelműen dönteni lehetett volna. Ki lehetett azonban zárni azon \mathbf{H} mátrixokat, amelyeknél nem teljesült az $e_{ij}=e_{ji}$ egyenlőség. Ugyanis számítás eredménye sok esetben negatív w^2 volt;
- a sajátfrekvenciák vagy a 10, 54, 74 Hz érték körül, vagy a 10, 20, 35 Hz értékek körül szórtak. Mindegyikben található olyan, ami a mért értékek tartományába esik;
- végül a hajlékonysági mátrix elemeit – elsősorban a meghatározott sajátfrekvenciák egységes tendenciája miatt – a toldás előidézte rugalmas csuklóban keletkező relatív elfordulás miatti \mathbf{M} nyomatékmódosulás nélkül kiszámított szélső oszlopokból, valamint a mért értékekre a Spline interpolációval fektetett görbén kiszámított középső oszlopból áll. Az eredmények ezen mátrixokkal voltak a legmegbízhatóbbak.

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^* \quad \begin{matrix} e_{ij} = e_{ji} \\ i = 6, 45, 3 \\ j = 6, 45, 3 \end{matrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{H}}} = \begin{bmatrix} e_{6,6} & e_{6,45} & e_{6,3} \\ e_{45,6} & e_{45,45} & e_{45,3} \\ e_{3,6} & e_{3,45} & e_{3,3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^*$$

A megmért lehajlások:

Az $e_{6,45}$, az $e_{45,45}$ és az $e_{3,45}$ lehajlások nagyított értékei mért értékek, ezeket tartalmazza az M13., valamint a jellemző értékeket összefoglaló M14., M15, M16 sz. táblázat is.

$e_{45,6}=e_{6,45}$, és az $e_{45,3}=e_{3,45}$ A szimmetria miatt $e_{3,6} = e_{6,3}$.

Az smeretlen lehajlások:

- a \dagger j. pontban ható egységerő hatására a $\dagger, ,, \dots, f$ pontok lehajlása ($e_{6,6}$, $e_{45,6}$ és $e_{3,6}$), valamint
- a f j. pontban ható egységerő hatására a $\dagger, ,, \dots, f$ pontok lehajlásai ($e_{6,3}$, $e_{45,3}$ és $e_{3,3}$).

Ha az $e_{6,6}$, $e_{6,3}$ és az $e_{3,3}$ lehajlásokat kiszámítjuk, akkor a hajlékonysági mátrix minden eleme ismertté válik. A továbbiakban az alábbi hajlékonysági mátrixokat tekintem érvényesnek. Ezekből számítom a merevségi mátrixokat: $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{H}}^{-1}$

6. táblázat

\mathbf{H}_{66}	\mathbf{H}_{64}
$\begin{bmatrix} 0.190741 \cdot 10^{-5} & 0.804053 \cdot 10^{-6} & 0.933245 \cdot 10^{-6} \\ 0.804053 \cdot 10^{-6} & 0.921108 \cdot 10^{-6} & 0.857116 \cdot 10^{-6} \\ 0.933245 \cdot 10^{-6} & 0.857116 \cdot 10^{-6} & 0.125867 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.197069 \cdot 10^{-5} & 0.884531 \cdot 10^{-6} & 0.961903 \cdot 10^{-6} \\ 0.884531 \cdot 10^{-6} & 0.102717 \cdot 10^{-5} & 0.920626 \cdot 10^{-6} \\ 0.961903 \cdot 10^{-6} & 0.920626 \cdot 10^{-6} & 0.129354 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$
\mathbf{H}_{62}	A 4–6600, 4–6400 és a 4–6200 állapotú/jelű gerendákon meghatározott hajlékonysági mátrixok
$\begin{bmatrix} 0.204227 \cdot 10^{-5} & 0.888820 \cdot 10^{-6} & 0.994323 \cdot 10^{-6} \\ 0.888820 \cdot 10^{-6} & 0.103545 \cdot 10^{-5} & 0.933818 \cdot 10^{-6} \\ 0.994323 \cdot 10^{-6} & 0.933818 \cdot 10^{-6} & 0.133299 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$	
\mathbf{H}_{46}	\mathbf{H}_{44}
$\begin{bmatrix} 0.201933 \cdot 10^{-5} & 0.831770 \cdot 10^{-6} & 0.100583 \cdot 10^{-5} \\ 0.831770 \cdot 10^{-6} & 0.910391 \cdot 10^{-6} & 0.841417 \cdot 10^{-6} \\ 0.100583 \cdot 10^{-5} & 0.841417 \cdot 10^{-6} & 0.134192 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.205717 \cdot 10^{-5} & 0.831770 \cdot 10^{-6} & 0.102349 \cdot 10^{-5} \\ 0.831770 \cdot 10^{-6} & 0.910391 \cdot 10^{-6} & 0.841417 \cdot 10^{-6} \\ 0.102349 \cdot 10^{-5} & 0.841417 \cdot 10^{-6} & 0.136327 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$
\mathbf{H}_{42}	A 4–4600, 4–4400 és a 4–4200 állapotú/jelű gerendákon meghatározott hajlékonysági mátrixok
$\begin{bmatrix} 0.211038 \cdot 10^{-5} & 0.855680 \cdot 10^{-6} & 0.104833 \cdot 10^{-5} \\ 0.855680 \cdot 10^{-6} & 0.957975 \cdot 10^{-6} & 0.873016 \cdot 10^{-6} \\ 0.104833 \cdot 10^{-5} & 0.873016 \cdot 10^{-6} & 0.139330 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$	
\mathbf{H}_{26}	\mathbf{H}_{24}
$\begin{bmatrix} 0.205283 \cdot 10^{-5} & 0.861706 \cdot 10^{-6} & 0.103125 \cdot 10^{-5} \\ 0.861706 \cdot 10^{-6} & 0.957269 \cdot 10^{-6} & 0.869681 \cdot 10^{-6} \\ 0.103125 \cdot 10^{-5} & 0.869681 \cdot 10^{-6} & 0.137024 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.212946 \cdot 10^{-5} & 0.888966 \cdot 10^{-6} & 0.106748 \cdot 10^{-5} \\ 0.888966 \cdot 10^{-6} & 0.992824 \cdot 10^{-6} & 0.896231 \cdot 10^{-6} \\ 0.106748 \cdot 10^{-5} & 0.896231 \cdot 10^{-6} & 0.141392 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$
\mathbf{H}_{22}	A 4–2600, 4–2400 és a 4–2200 állapotú/jelű gerendákon meghatározott hajlékonysági mátrixok
$\begin{bmatrix} 0.219418 \cdot 10^{-5} & 0.900161 \cdot 10^{-6} & 0.109809 \cdot 10^{-5} \\ 0.900161 \cdot 10^{-6} & 0.101411 \cdot 10^{-5} & 0.920072 \cdot 10^{-6} \\ 0.109809 \cdot 10^{-5} & 0.920072 \cdot 10^{-6} & 0.145080 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$	

Esetünkben a fenti merevségi mátrixok nem pontosak. Ugyanis – a gyakorlati tartószerkezetek dinamikai jellemzőinek változását vizsgálnánk – a kísérletre nem finomított ácsolt fatartót vizsgáltunk. Kiderült, hogy ezen szerkezet matematikai leírása a megépített tartó igényeit követő pontossággal és úgy, hogy kis (végső soron egységnyi) erőkre is érvényes legyen, lehetetlen. Ezt ugyan tudtuk, és a feldolgozás most megkívánt pontossága általában

nem is szükséges, mert a szerkezeteinket csak határerőre vizsgáljuk a tervezés/áttervezés során. És tudjuk nagyon jól, hogy a tartószerkezetek megengedett (vagy határ-) terhe a ténylegest nagyon ritkán éri el. Az előre nem tudható anyag, tervezési vagy építési hibákat nem tekintve. Vannak veszélyes vagy kevésbé veszélyes tartószerkezeti tönkremenetek a nem figyelt – katasztrófa okozta – terhek miatt. Vagy túlterhelés miatt.

Példaként beszéljünk a hídszerkezetekről!²⁶ Ezen tartók a stikailag és dinamikailag legjobban követhető megépített szerkezetek, tehát mérési eredményeik a tervezetteket várhatóan jobban követik mint egyéb tartószerkezetnél. Mégis jóval nagyobb eltérést engednek meg a mért és a számított értékek között, mint az általam az kitűzött mérték. Persze nekem a mérés és a számítás pontosítására volt lehetőségem!

Persze a pontossági követelmény az elmúlt 30-35 évben nőhetett, ugyanis minden pontosabb lett (tervezés, kivitelezés, mérés, nyilvántartás), az értékek jobb közelítése elvárható, de a tendencia, mely szerint a faszerkezet a legkevésbé matematikailag leírható, nem változott. És ez nem hiba, hanem tulajdonság!

A próbaterhelések során szerzett tapasztalataim szerint a legtöbb híd esetében a mért lehajlások a számítottakat a megengedettnek mintegy 2/3-ával haladták meg. Mivel lehajlások összehasonlításáról van szó, a számításban alapvető szerepük volt a hajlékonysági mátrixoknak. Persze nemcsak ezek hordozzák a szükségszerű közelítések és egyszerűsítések hatását, a pontatlanságokat. De megbecsülhetjük, hogy az erő-lehajlás függvényeket kb. 90%-os pontossággal tudjuk meghatározni.

A szabályzatokban lévő közelítések – anyagmodell, anyagi jellemzők, statikai váz (pl. csuklós támasz elfordulása, a merev befogás nem elfordulása), a terhek elhelyezése, az önsúly nagysága és eloszlása, a tartók repedései, stb. – kényszerű és célszerű betartása, a számítások szükségszerű egyszerűsítései miatti pontatlanság 10 – 20%-ra tehető.

²⁶ A vasúti hidak próbaterheléséről azt írja az 1976. évi Vasúti Hídszabályzat tervezete, hogy a forgalomba-helyezés egyik feltétele, hogy a mért rugalmas eltolódások a számítottakat

- acél- és öszvér hidaknál a 10%-ot,
- acélgerenda-betétes beton és vasbeton hidaknál a 20%-ot,
- fahidaknál – a maradó alakváltozás után – a 30%-ot

nem haladja meg.

Az 1974. évi Közúti Hídszabályzat a mérési és a számítási eredmények egyezőségéről a VH-val azonosan rendelkezik. Azaz a mért lehajlás a számítottat

- acélhidaknál és együttdolgozó szerkezetű hidaknál legfeljebb 10%-kal,
- vasbeton, feszített beton, beton- és kőhidaknál legfeljebb 20%-kal,
- fahidaknál a második terhelés alatt legfeljebb 30%-kal

haladhatja meg.

6.3. A SAJÁTREZGÉSSZÁMOK

6.3.1. Meghatározásuk dinamikai mérésekkel

Ha a rezgésszám, az időegység alatt (1 sec) elvégzett rezgések száma csak a rendszerre/szerkezetre jellemző mechanikai tényezőktől függ, akkor sajátrezgésszámról (sajátfrekvenciáról) beszélünk. A rezgés periodikus elmozdulás, és ha egy pont/keresztmetszet rezgéseinek valamely jellemzőjét (a rezgés során megtett utat, a mozgás sebességét vagy gyorsulását) az idő függvényében, mint válaszfüggvényt rögzítjük, megkapjuk a rendszerre/tartószerkezetre jellemző kitérés/elmozdulási sebesség/sebességváltozás – idő függvényt. Ezen periodikus (sin/cos) függvény Fourier sorokkal tetszőleges pontossággal közelíthető. A mérések rögzített jeleit (esetünkben a rezgések gyorsulását) a Fourier analízissel dolgozzuk fel.²⁷ Az időfüggvényekből frekvenciafüggvények számíthatók anélkül, hogy a függvények információtartalma sérülne.

Manapság már számítógépes softvairak végzik helyettünk ezen számításokat. (Pl. a **catman**^o. A méréseink során rögzített rezgés gyorsulás függvényeket ennek segítségével dolgoztam fel.)

A számított frekvencia-spektrumokból állapíthatók meg a sajátfrekvenciák. Ugyanis a rezgéseket leíró differenciálegyenletek diszkrét értékeként tartalmazzák a sajátértékeket, amelyek azonosak a sajátrezgésszámokkal. A Fourier transzformáció (FFT) teljesen tiszta („elméleti”) jelekből csak ezen értékeket adja meg. A mért jelek azonban soha nem tiszták, így a frekvenciasíkra transzformált görbében sok zaj látszik, a csúcsokból (peak, M16., M17., M18. és M19. táblázat) ki kell választanunk a sajátfrekvenciákat. Ugyanis a csúcsok többsége nem sajátfrekvencia. – Ezeket az alábbiak alapján határozzuk meg:

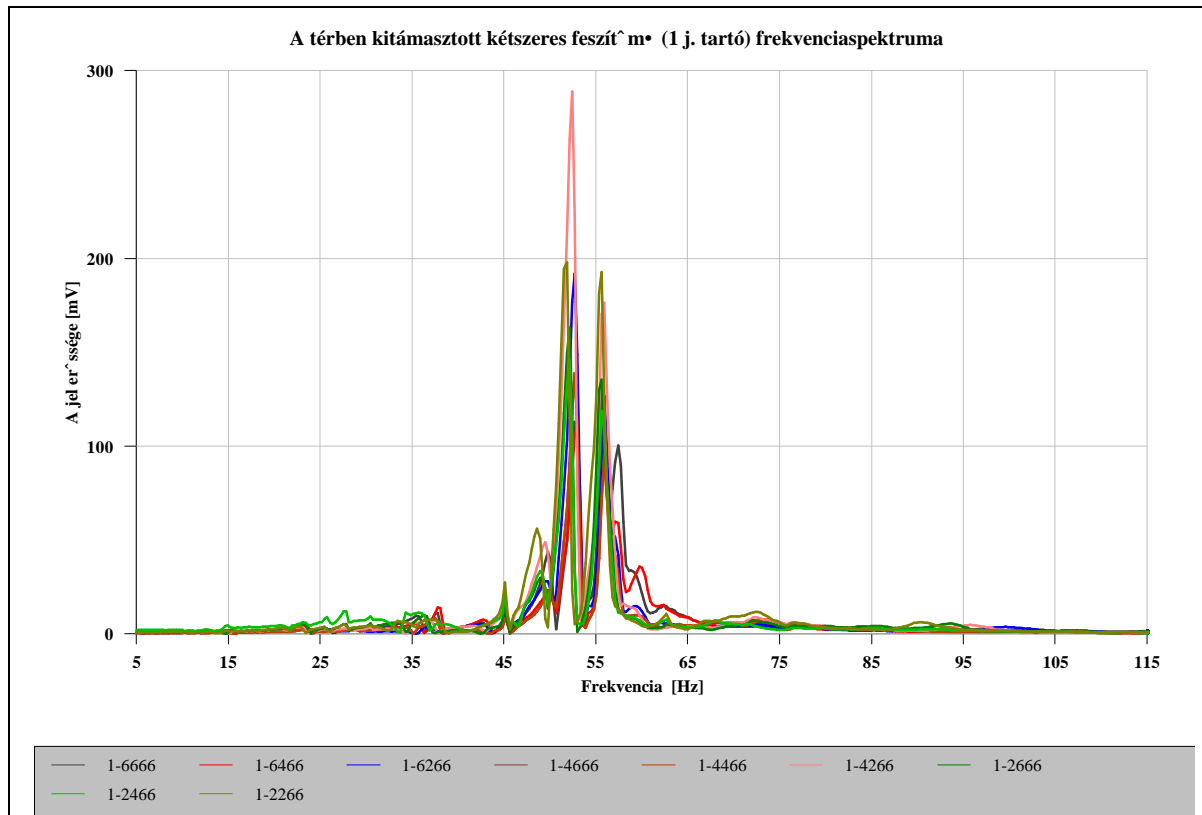
- a jel erőssége,
- több transzformált mérés eredményének egybeesése, valamint a
- a számítás és a mérés eredményeinek összevetése segítségével.

A matematikai megoldás, mely szerint a sajátrezgésszámok nagyság szerint növekvő sorrendben követik egymást, nem tartalmaz arra nézve információt, hogy milyen a frekvenciák előfordulásának intenzitása/erőssége²⁸. Ez valamilyen arányban van a jeleket leíró harmonikus függvények görbe alatti területével.

A feldolgozás során kapott frekvenciák erőssége egymástól nagyon eltér, de ez a vizsgálatunk szempontjából nem minősíthető.

²⁷ L. pl. Frequency Analysis (Brüel & Kjøer 1977), Digital Signal Analyses (Brüel & Kjøer 1981)

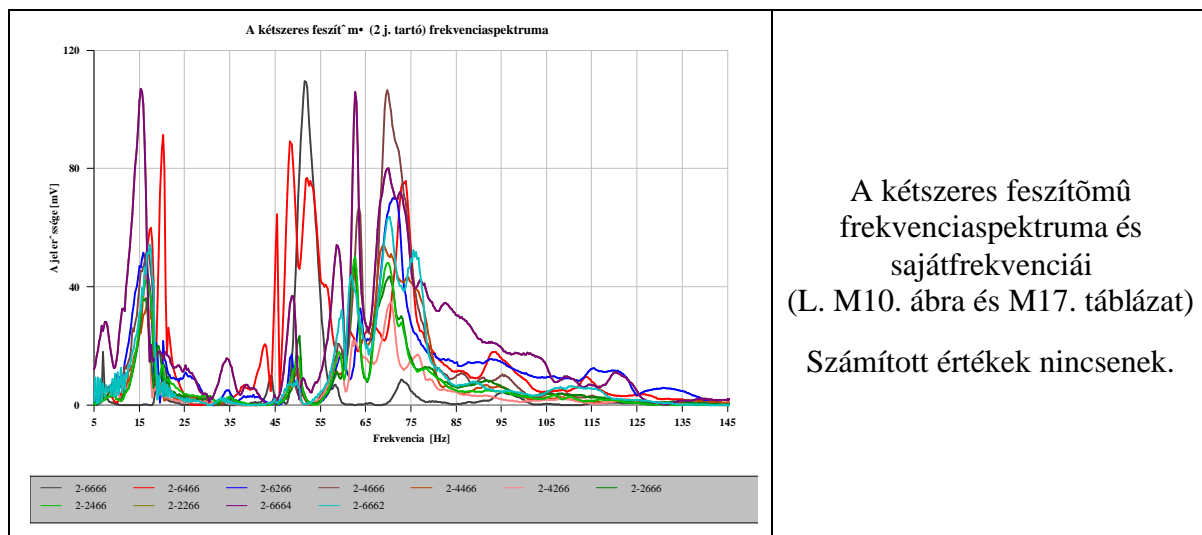
7. táblázat



1-6666 j. tartó	1-6466 j. tartó	1-6266 j. tartó	1-4666 j. tartó	1-4466 j. tartó	1-4266 j. tartó	1-2666 j. tartó	1-2466 j. tartó	1-2266 j. tartó
45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179
52,7348	53,0274	52,7348	52,7348	52,7348	52,441	52,1484	52,1484	51,8557
55,6646	55,9573	55,9573	55,9573	55,9573	55,953	55,666	55,666	55,6646

A térben kitámasztott kétszeres feszítőmű frekvenciaspektruma és sajátfrekvenciái
(L. M9. ábra és M16. táblázat)
Számított értékek nincsenek.

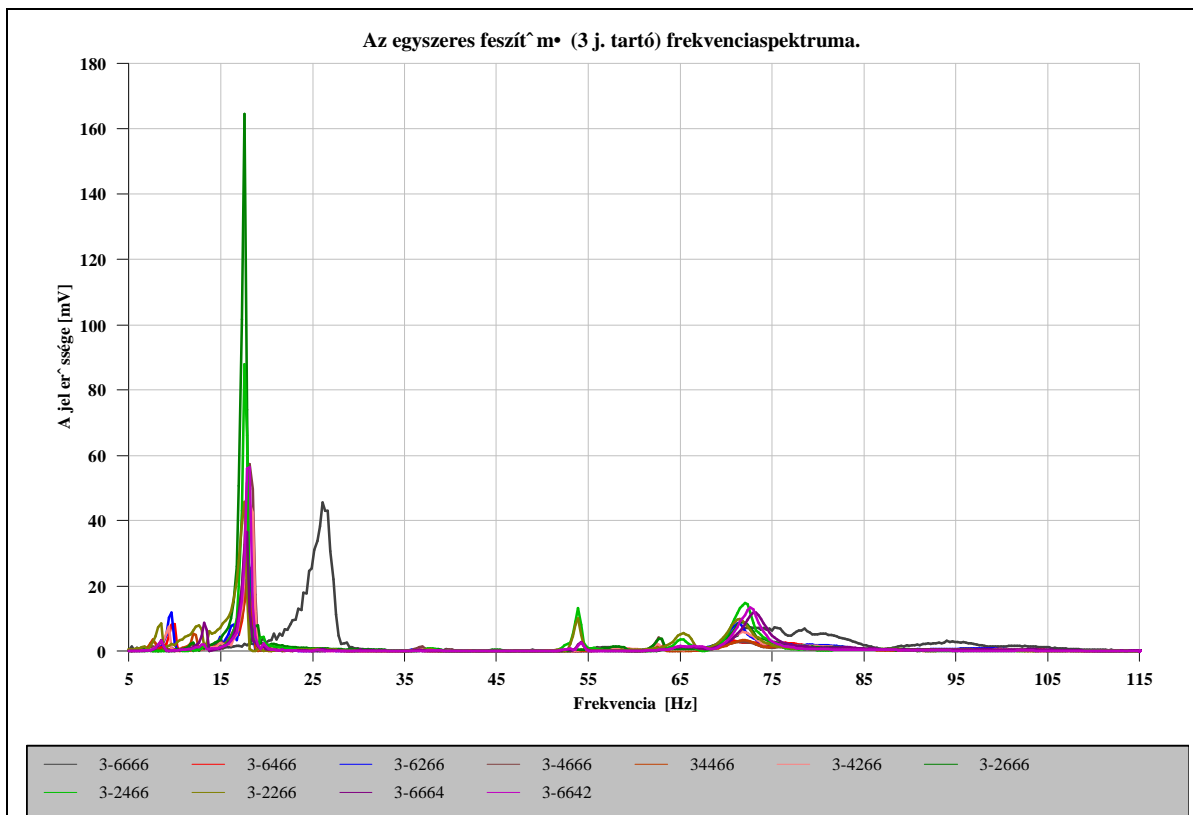
8. táblázat



²⁸ Angolul használják a „power” szót a feldolgozott jelek függőleges tengelyének jellemzésére. (dB)

2-6666 j. tartó	2-6466 j. tartó	2-6266 j. tartó	2-4666 j. tartó	2-4466 j. tartó	2-4266 j. tartó	2-2666 j. tartó	2-2466 j. tartó	2-2266 j. tartó
18,16406	18,16406	19,04297	16,99219	16,6992	16,69922	16,11328	16,40625	15,52734
52,44141	51,85547	50,39063	48,63281	50,0976	49,80469	50,39063	50,09766	50,97656
66,21094	66,21094	71,77734	69,72656	68,5549	70,60547	70,01953	70,01953	69,43359

9. táblázat



3-6660 j. tartó	3-6460 j. tartó	3-6260 j. tartó	3-4660 j. tartó	3-4460 j. tartó	3-4260 j. tartó	3-2660 j. tartó	3-2460 j. tartó	3-2260 j. tartó
19,62891	18,16406	17,87109	18,16406	17,87109	18,16406	19,04297	19,62891	19,04297
57,42188	62,40234		62,69531	62,69531	62,40234	62,69531	65,33203	52,44141
75,29297	70,89844	71,19141	71,77734	72,07031	71,77734	71,77734	72,07031	65,03906

Az egyszeres feszítőmû frekvenciaspektruma és sajátfrekvenciái
(L. M11. ábra és M18. táblázat)
Számított értékek nincsenek.

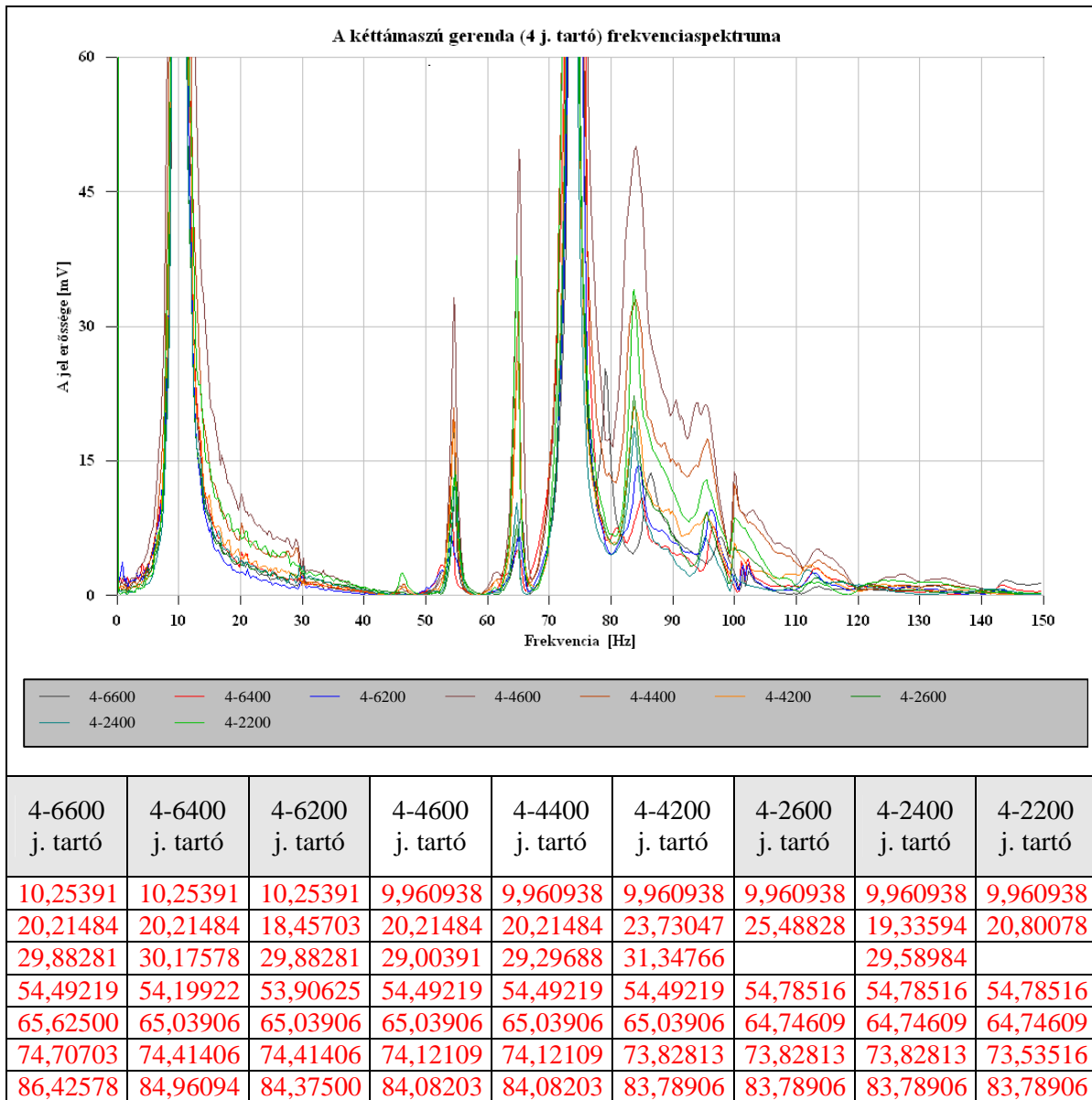
Az 1, 2, 3 j. tartót számítással nem vizsgáltam. Ugyanis a statikai vázat nem határoztam meg, így a merevségi mátrixok hiányzó elemeit nem tudtam kiszámítani. Az 1 j. tartó volt a legmerevebb, a térbeli kitámasztás miatt vízszintes elmozdulások nem voltak, statikai vázat elégséges pontossággal meg lehetne határozni.

A sajátfrekvenciák rendszertelen változásából arra lehet következtetni, hogy a 2 és 3 j. tartó kívánt pontosságú statikai vázat eléggé bizonytalanul lehetne meghatározni. A gerenda vízszintes elmozdulását minden terhelésnél megmértük, tehát elvileg leírható lenne a tartó

úgy is, hogy figyelembe vennék a teher síkjának a tartó síkjától való eltérését is. Ez adódik a geometria asszimetriájából is.

Mind számítással, mind méréssel vizsgáltuk a 4 j. tartót, a részben kétfás kéttámaszú gerendát. A 10. táblázat szerinti sajátfrekvenciákat mértük:

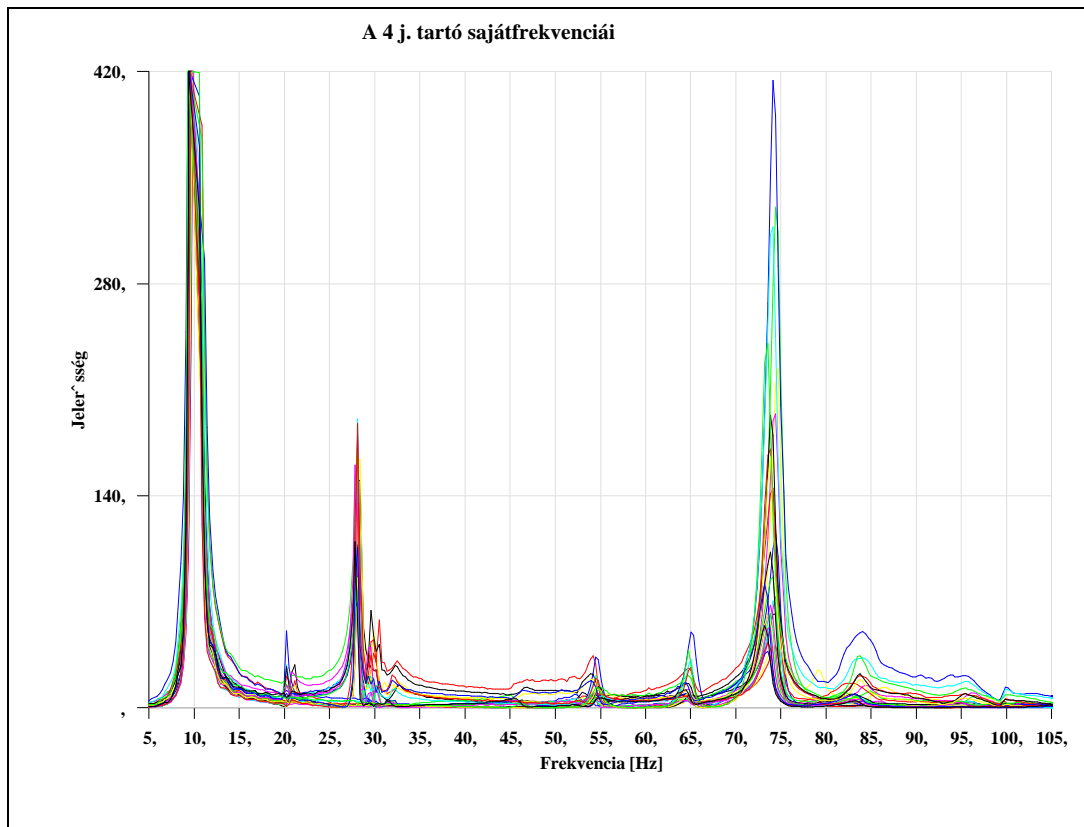
10. táblázat



A kéttámaszú gerenda mért frekvenciaspektruma és a mért sajátfrekvenciái
(L. M12. ábra és M19. táblázat)

A 20 Hz és a 30 Hz körüli sajátfrekvenciák léte a fenti táblázatban lévő ábra alapján nem meggyőző. Különösen a 10 Hz és a 75 Hz körüli értékekhez képest. Több érzékelő jelét értékelve azonban igazolva látszik, hogy a 10. táblázat értékei tényleg sajátfrekvenciát jelölnek. (A melléklet hivatkozott ábrái és táblázatai a közepső km.-ben elhelyezett érzékelő válaszjelének feldolgozásának eredményei.)

A 11. ábra három db rezgésgyorulásmérőn mért válaszjelek értékelésének eredményeit mutatja. Ezen a 20 Hz és a 30 Hz körüli sajátfrekvencia meggyőzőbb, a 85 Hz körüliek kevésbé, mint az előző ábrán. de a 40 Hz körüli értéket – l. számítás – egyik sem tartalmaz



11. ábra

A 4 j. gerenda rezgésének frekvenciái a 3, 45 és a 6 j. km.-ekben lévő érzékelők válaszjelei alapján.

A tartó mért sajátfrekvenciái a fent részletezett módon voltak kiválaszthatók. Pedig a gerenda térbeli merevségével nem lehetett probléma. Várható, hogy a legegyszerűbb szerkezet mért és a számított értékei aránylag jól egyeznek.

6.3.2. A sajátfrekvenciák és a sajátlengés-alakok kiszámítása

A 3.1.2. pontban tárgyaltuk a többszabadságfokú diszkrét modellek sajátfrekvenciáinak és sajátmódusainak számítását. Itt csak nagyon röviden összefoglaljuk három szabadságfokra. A melléklet a számítás részleteit is tartalmazza.

A csillapítás nélküli rezgések $(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \cdot \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}}$ homogén lineáris egyenletéből kell meghatározni az ω_0 sajátértékeket és az ezekhez tartozó $\underline{\underline{v}}$ sajátvektorokat. Az egyenletnek akkor van a triviálisól különböző megoldása, ha az egyenlet $|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \cdot \underline{\underline{M}}|$ determinánsa zérus. Ezen homogén egyenletből a sajátfrekvenciák kiszámíthatók. (Három szabadságfok

esetén a $\underline{\mathbf{K}}$ merevségi mátrix és az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix 3×3 méretű, így az első három sajátértéket tudjuk meghatározni (11. táblázat).

11. táblázat

A kéttámaszú gerenda számított sajátfrekvenciái									
$f_i = \omega_i/2\pi$									
i	4-6600 j. tartó	4-6400 j. tartó	4-6200 j. tartó	4-4600 j. tartó	4-4400 j. tartó	4-4200 j. tartó	4-2600 j. tartó	4-2400 j. tartó	4-2200 j. tartó
1	10,36842	10,09818	9,97717	10,14076	10,08112	9,94159	10,01000	9,84229	9,71849
2	21,99146	21,68233	21,27037	21,99736	21,82114	21,44679	21,85593	21,46932	21,07429
3	39,67185	38,53428	37,77698	36,41728	35,83974	35,10791	35,54344	34,70458	34,41603

Az az azon sajátrezgésszámokat, amelyek esetén az autonom rendszer első, második és harmadik sajátalakja (sajátmódusa) szerint mozog. De nem izoláltan! A rezgések közbeni kitérések elvileg végtelen sok sajátalakból tevődnek össze. Vagy matematikusan: a rezgésalak a sajátalakok lineáris kombinációjaként írható fel. (Amennyiben a rezgésegyenlet megoldását a sajátvektorok bázisán határozzuk meg, modálanalízist végzünk.)

Amennyiben az $n \times n$ méretű $(\underline{\mathbf{K}} - \omega_i^2 \cdot \underline{\mathbf{M}}) \cdot \underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\mathbf{0}}$ egyenlet – esetünkben 3×3 -as – karakterisztikus mátrixának \mathbf{r} rangja \mathbf{n} -nél kisebb (esetünkben 2), akkor az előbbi lineáris egyenletrendszer csak úgy oldható meg, ha $\mathbf{n}-\mathbf{r}$ számú (most 1 db) szabad ismeretlent tételezünk fel,

melynek értékét 1-nek választjuk. Azaz $\underline{\mathbf{v}}_{i0} = \begin{matrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{matrix}$. Az w sajátértékekhez rendelt három li-

nearis egyenletről tetszés szerint kettőt kiválasztva, a \mathbf{c}_1 és \mathbf{c}_2 konstansok meghatározhatók. (A 3-2 db csoportosítás azonos \mathbf{c}_1 és \mathbf{c}_2 értékeket ad.) Tehát minden merevségi mátrixhoz meghatározható 3 db, a rezgés egyenletének megoldását jelentő, páronként összetartozó w sajátérték (sajátrezgésszám) – $\underline{\mathbf{v}}$ sajátvektor (sajátalak) rezgésjellemező.

A sajátmódusok – a 3.1.2. pontban ismertetettek szerint – un. tömegmátrixra normált értékeit kapjuk a fenti számítás alapján. Azaz igaz a kifejezés, hogy $\underline{\mathbf{v}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_i = 1, \quad i = 1, 2, 3.$

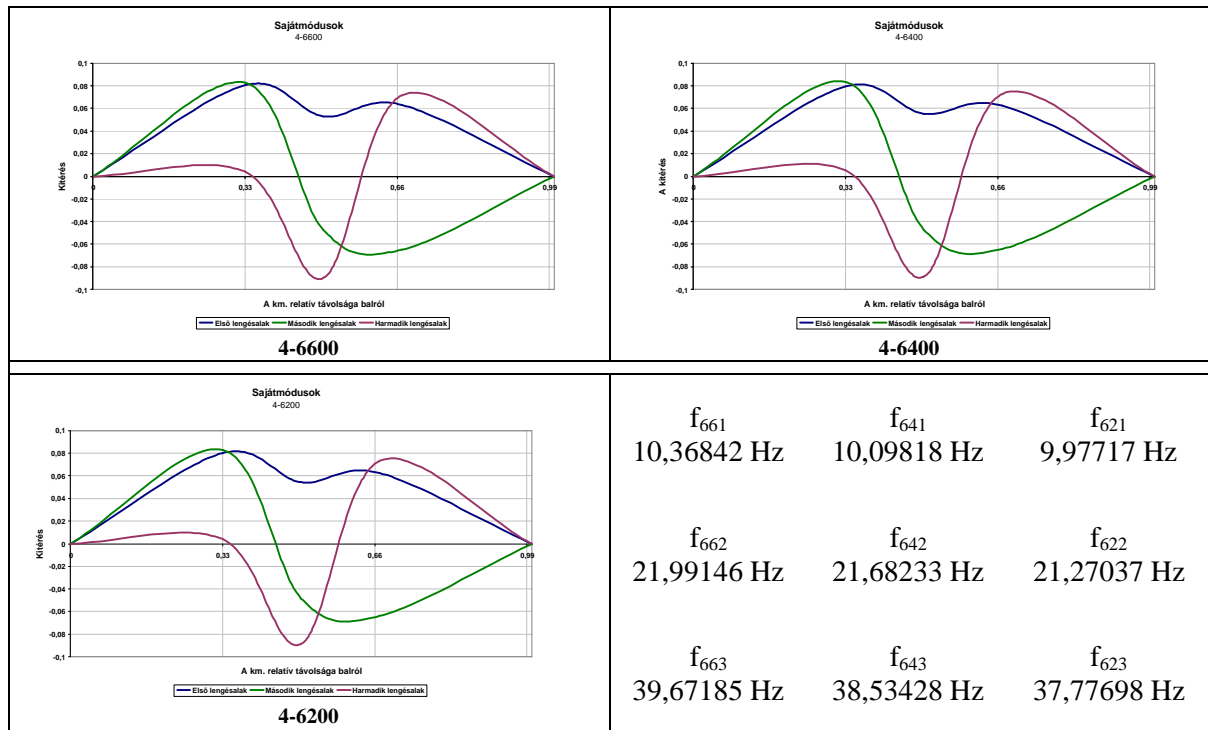
Ezen egyenlőséget úgy érjük el, ha a számításainkban a $\underline{\mathbf{v}}$ vektort ténylegesen normáljuk. Határozzuk meg a fenti szorzat értékét az w_i ($i=1,2,3$) sajátértékhez tartozó $\underline{\mathbf{v}}_i$ sajátvektor esetén: $\underline{\mathbf{v}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_i = a_i$. Értéke nem 1, emiatt a sajátvektort osztanunk kell $\sqrt{a_i}$ értékkel, így

a $\frac{1}{\sqrt{a_i}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_i$ szorzat egységnyi lesz. A tömegre normált sajátvektorokat ábrázol-

va pedig kapjuk a sajátlengések alakjait.

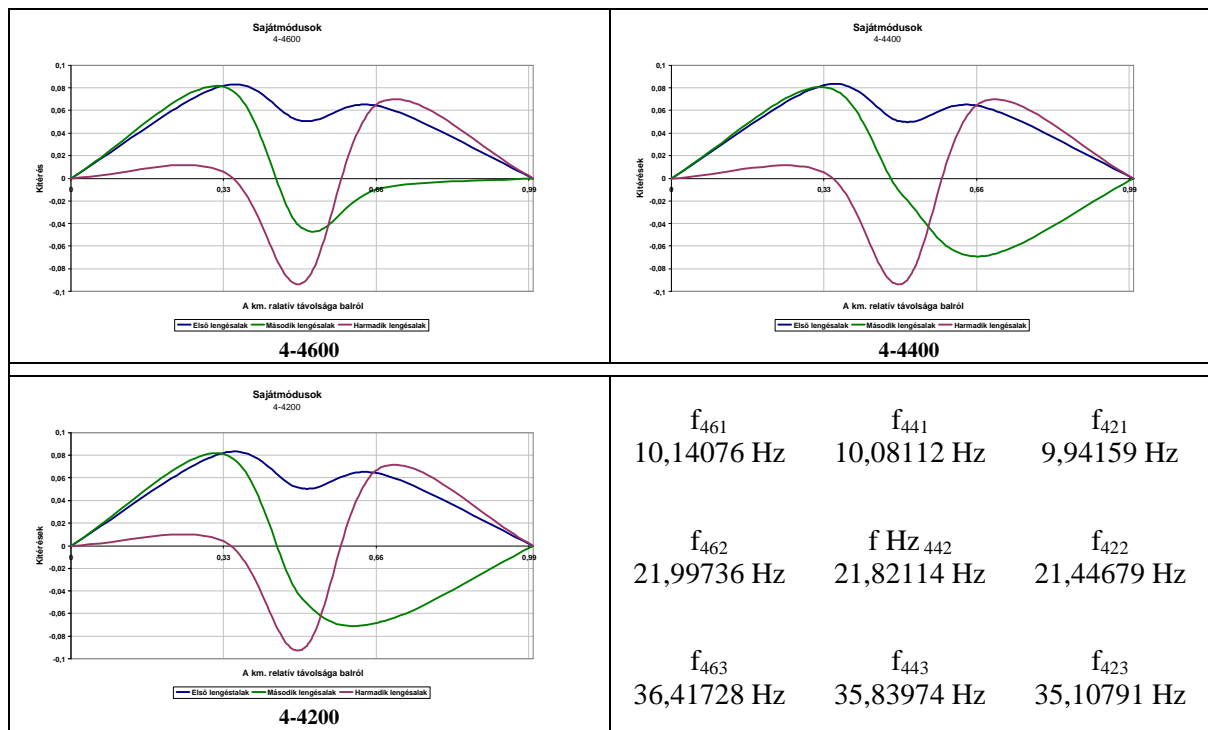
6.4. SAJÁTALAKOK

Az M29. táblázat a kiszámított módusokat értékeit, a 12., 13. és 14. ábra pedig a mm-ben mért elmozdulásokat mutatja.



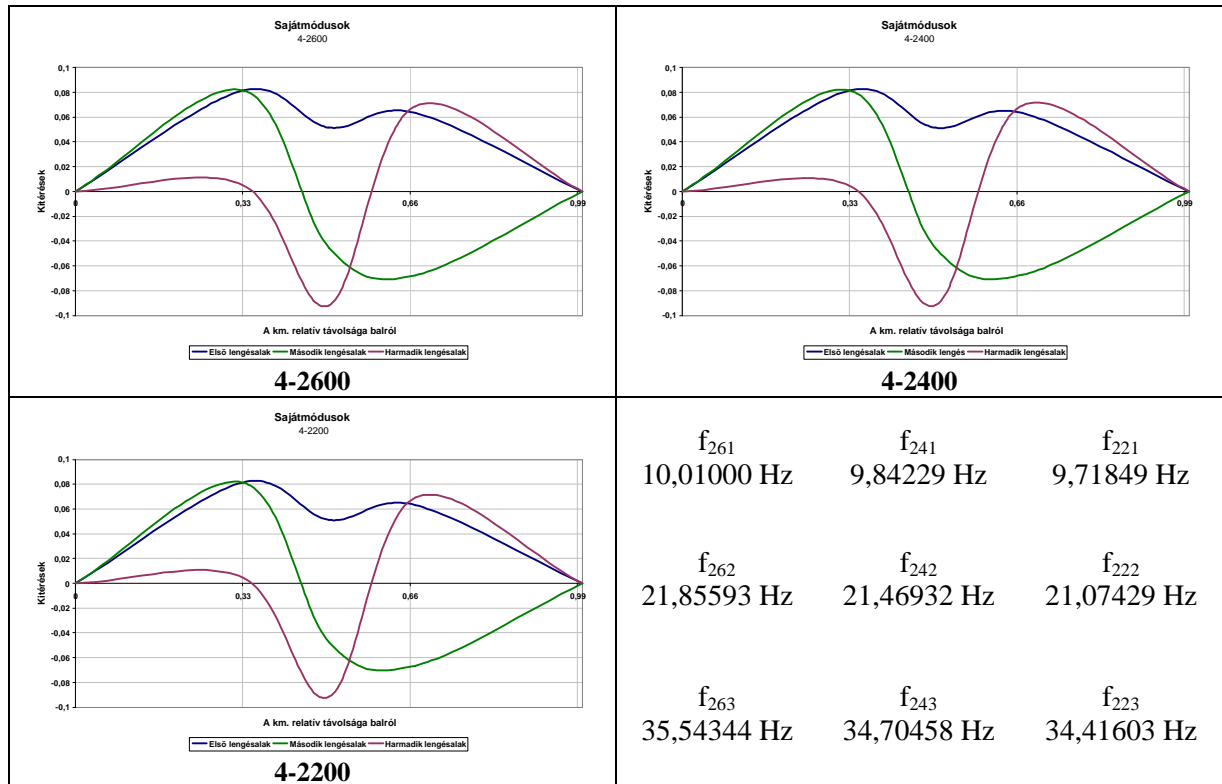
12. ábra

A 4-6... j. gerenda sajátmódusai. (A kitérések nagyságát mm-ben adtam meg.)



13. ábra

A 4-4... j. gerenda sajátmódusai. (A kitérések nagyságát mm-ben adtam meg.)



14. ábra

A 4-2...j. gerenda sajátmódusai. (A kitérések nagyságát mm-ben adtam meg.)

A kilenc db különböző állapotú gerenda összehasonlítható sajátmódusainak alakja nem tér el egymástól. Az ábrázolt sajátalakok jellegzetes tulajdonságai:

- a második, az *antimetrikus* sajátalak mindegyik esetben a várt módon néz ki, azaz a bal és a jobb oldal elmozdulásainak különbözősége nem látszik feltűnően. Tudjuk, hogy a vizsgált tartó nem szimmetrikus, és hasonlóan az elcsúszásokhoz (Melléklet 1.4.5. pont), a jobb oldal mozgásai nagyobbak. A lengés csomópontja nincs közepén, hanem kb. a $\xi = 0,44$ körüli keresztmetszetben. (A relatív elcsúszások értékeire interpolált görbék zéruspontjai sincsenek közepén: M6. és M10. táblázat. Az elcsúszások ábrázolása azonban azt mutatja, hogy az ábrák nem a középső km.-ben váltanak előjelet, de inkább a $\xi = 0,5$ és a $\xi = 0,55$ között. Tehát a mérési eredményekre rajzolt görbék és az pontokra fektetett interpolációs függvények számított értékei alapján nem alakult ki egységesen, hogy hol van a mozgások előjelváltása;
- a *szimmetrikus* sajátalakok már durván eltérnek a szimmetrikus tartókra számítható alakoktól. Az első sajátalak a tartó közepe táján felülről nézve nem konvex, hanem konkáv, és a harmadik sajátalak kitérései a bal oldalon sokkal kisebbek, mint a jobboldalon. Az eltérésekből nem tudok következtetéseket levonni, csak megállapítani tudom a két oldal eltérő viselkedését, azaz a szimmetriától való eltérést.

A sajátalakokat mérni is lehetett volna. Ehhez ismert jellel való gerjesztés szükséges. Tehát az, hogy a mért elmozdulások minden időpillanatban egy gerjesztő frekvenciához legyenek hozzárendelhetők. – A laborban nem volt pulzátor.

A valóságos adatok ábrázolása megmutatta volna a tényleges sajátalakokat, és ebből talán lehetett volna következtetéseket levonni. – A bizonytalan értékeket is tartalmazó merevségi mátrixokkal meghatározott sajátalakokkal a szerkezeti hiba jelzése nem bizonyos.

6.5. REZGÉSALAK

A 3.1.2. pontban bemutattam, hogy a tömegmátrixra ortonormált sajátvektorok és a $\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{M}}$ mátrixpár sajátértékeinek ismeretében a rendszer rezgésalakja egyszerűen felírható, ugyanis az az n -edrendű mátrix-differenciálegyenlet n db szabadság fokú mozgásnak megfelelő differenciálegyenletre esik szét. A rezgésalakot az egyes sajátértékekhez tartozó partikuláris megoldások lineáris kombinációjaként kapjuk meg ($1 \leq r \leq n$):

$$\underline{\mathbf{w}}(t) = \sum_{r=1}^n \underline{\mathbf{y}}_r \cdot \underline{\mathbf{y}}_r^* \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \left[\underline{\mathbf{w}}_0 \cdot \cos(\omega_{0r} \cdot t) + \frac{1}{\omega_{0r}} \underline{\mathbf{w}}_0^g \cdot \sin(\omega_{0r} \cdot t) \right]$$

Ha autonom rezgéseket vizsgálunk, akkor mindkét kezdeti feltétel zérus, azaz $\underline{\mathbf{w}}_0 = \underline{\mathbf{w}}_0^g = \underline{\mathbf{0}}$.

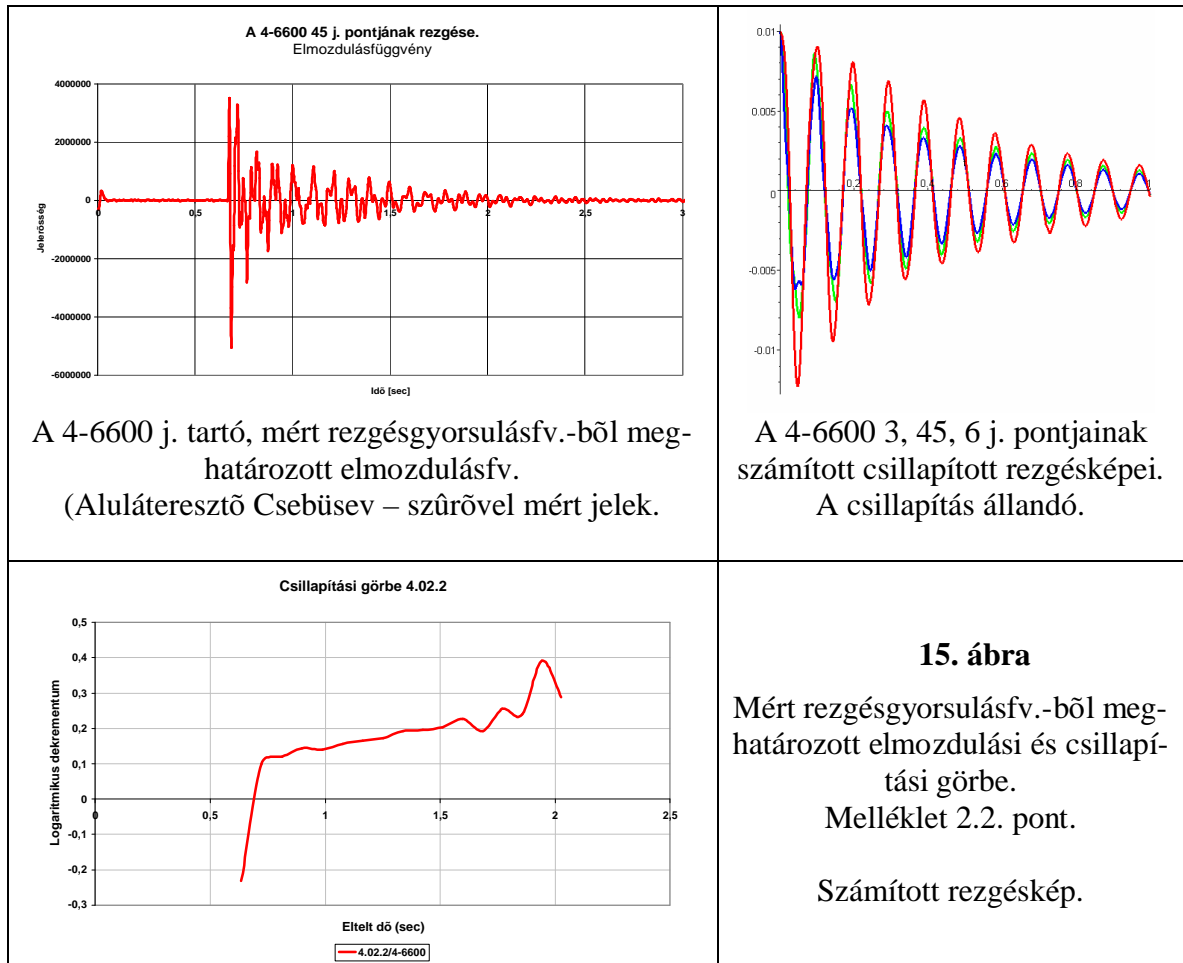
A rezgésalakok azonosak a sajátalakokkal.

Más esetben (szabadrezgés, gerjesztett rezgés) figyelembe kell vennünk valami kezdeti hatást, különben rezgésalak nem számítható.

A Melléklet 5.3. pontja tartalmazza három gerenda szabadrezgésének számítását egy reális, de nem mérésből származó kezdeti feltételekkel. Mind a csillapítás nélküli, mind a csillapított esetben a 3.1.1. pontnak megfelelően.

A következő, a 13. ábrán a mért és számított elmozdulásokat hasonlítjuk össze. A mért és szűrt rezgés gyorsulás fv. második deriváltja ábrázolja az elmozdulásokat. A mozgás nyilván csillapított, és ez a periodikus görbén látszik is. A gerenda frekvenciaspektrumát a 11. ábra mutatja. A csillapított rezgés képét a mért adatokból vett logaritmikus dekrementummal ($\vartheta = 0,4$) kiszámítottam a sajátkörfrekvenciák csillapított tartóra vonatkozó értékével (3.1.1. pont). A számított görbe csillapítása állandó.

Látható még az ábrán a mért jelekből a 2.2. pont szerint számított csillapítási görbe, a logaritmikus dekrementum változása az idő függvényében. A középső (45 j.) km. rezgés gyorsulási adataiból számítva. A görbe nem állandó, ugyanis nem elmélető tisztaságú és nem maradéktalanul lineárisan viselkedő tartó méréséből adódott.



15. ábra

Mért rezgés gyorsulásv.-ből meghatározott elmozdulási és csillapítási görbe.

Melléklet 2.2. pont.

Számított rezgésképek.

6.6. KÖVETKEZTETÉSEK

A dinamikai vizsgálat a vártnál kevesebb következtetés levonására jogosít. A felsorolható megállapítások szinte mindegyike a biztosan igaz, de esetemben nem, vagy nem egyértelműen igazolható összefüggésekre vonatkozik. A szakirodalom alapján ugyanis joggal igazolhatónak látszott, hogy a változtatott állapotú tartók dinamikai válaszjelei úgy térnek el egymástól, hogy az eltérések feldolgozásával valamilyen határozott összefüggés állapítható meg az eltérés oka és a dinamikai válasz módosulása között. Ez a reményem csak általánosságban vált be. Ugyanis a mindennapi mérnöki gyakorlatnak megfelelően linearitást feltételezve kezdtem neki a mérési eredményeim számított modellre való alkalmazásának.

A figyelt dinamikai alapfeltevések is lineáris modellre vonatkoznak, azaz olyan tartókra, amelyeknek a tengelye mentén azonos az elcsúszás, ill. az elcsúszással szembeni K ellenállás, valamint kis erőkre (5 kN teher alatt, pl. $F=1$ értékre) is lineárisan viselkednek. És ezen feltétel elfogadása olyan statikai vázat eredményez, amelyen az elvégzett számítási eredmények a mért értékekkel összehasonlíthatók. Ezen feltételezést azonban a mérési eredmények feldolgozása csak korlátozva igazolta.

Vegyük sorba a dinamikai alapösszefüggés szerkezeti mátrixait!

Az **M** tömegmátrixot elfogadjuk helyesnek, ugyanis a tartó össztömegét méréssel határoztuk meg. Ebben annyi számítás hogy a tömegeket adott pontokban koncentráltuk.

A **K** merevségi mátrix számítással meghatározott elemei nem eredményeztek szimmetrikus mátrixot, jöllehet a a dinamika lineáris elmélete szerint a **K** nemcsak valós elemű (meg egyezik a konjugáltjával), hanem szimmetrikus is, azaz megegyezik a transzponáltjával. Van leírás azon esetre is, amikor ezen mátrixok nem hermitikusak, de ez az egyébként egyszerű elméletet nagyon bonyolítja.

A dinamika alapegyenletében szereplő harmadik szerkezeti jellemzőt, a **D** csillapítási mátrixot figyelmen kívül hagytuk, mert a szakirodalom – és saját tapasztalataim szerint is – a mérnöki szerkezetek csillapítása nagyon kicsiny.

Tehát az egyenlet három mátrixa közül kettő nem maradéktalanul tükrözi a valóságot. Ennek köszönhetően számítási eredményeink eltérnek a mért eredményektől. – A kisebb eltérések is meghaladnák azt az előre definiált mértéket, melyet szerkezetváltozási következményként foghatnánk fel. Ezen változási tartomány megbecsülhető:

1. A szerkezet módosulását jelentő változás **alsó határa** a csillapított és a csillapítatlan

frekvenciák hányadosa, ami az $\sqrt{1 - \frac{J^2}{4 \times \rho^2}}$ összefüggésből adódik. Egy nem csillapított rendszerként kezelhető szerkezet esetén (pl. $\vartheta = 0,2$) ez a mérték a mért (tehát csillapított) frekvencia 1%-a alatt van, ill. – ha az ennél magasabb – a mindenkori mérési pontosság.

2. **Felső határként** jelöljük meg a mostani számításokból adódó mértéket. Figyeljük meg a mért értékek változását a 10., 11., 12., 13. táblázatok alapján:

- o a 10. és a 11. táblázat tartalmazza a vizsgált kéttámaszú tartók mért és számított sajátfrekvenciáit. Igazán csak az alapértékek hasonlíthatók össze, itt az eltérés 2-3% körül van;
- o a számított értékeknél minden esetben megfigyelhető, hogy a sajátfrekvenciák a tartó gyengülésével csökkennek. Erre lehetett számítani. A csökkenés mértéke – követő/előző sajátfrekvencia – nem azonos, de 3%-nál nem nagyobb (12. táblázat);
- o a második/első és a harmadik/második sajátfrekvenciák aránya nem teljesen ugyan, de aránylag azonos. A változás mértéke itt is max 3%. Két tizedesre:

0,97;0,98 0,99;0,98; 0,99;0,98 0,98;0,98

12. táblázat

A kéttámaszú gerenda számított sajátfrekvenciáinak arányai						
Arány	f_{641}/f_{661} f_{642}/f_{662} f_{643}/f_{663}	f_{621}/f_{641} f_{622}/f_{642} f_{623}/f_{643}	f_{441}/f_{461} f_{442}/f_{462} f_{443}/f_{463}	f_{421}/f_{441} f_{422}/f_{442} f_{423}/f_{443}	f_{241}/f_{261} f_{242}/f_{262} f_{243}/f_{263}	f_{221}/f_{241} f_{221}/f_{241} f_{221}/f_{241}
i	4-6.00 j. tartó		4-4.00 j. tartó		4-2.00 j. tartó	
1	0,973936	0,988016	0,994119	0,986159	0,983245	0,987422
2	0,985943	0,981000	0,991989	0,982845	0,982311	0,981600
3	0,971326	0,980347	0,984141	0,979580	0,976399	0,991686

A *felső határ* a mérési eredmények alapján (13. táblázat) a számított értékektől jelentősen eltér, vagy állandó, vagy azokhoz képest hektikusan változik:

13. táblázat

A kéttámaszú gerenda mért sajátfrekvenciái									
i	4-6600 j. tartó	4-6400 j. tartó	4-6200 j. tartó	4-4600 j. tartó	4-4400 j. tartó	4-4200 j. tartó	4-2600 j. tartó	4-2400 j. tartó	4-2200 j. tartó
1	10,25391	10,25391	10,25391	9,960938	9,960938	9,960938	9,960938	9,960938	9,960938
2	20,21484	20,21484	18,45703	20,21484	20,21484	23,73047	25,48828	19,33594	20,80078
3	29,88281	30,17578	29,88281	29,00391	29,29688	31,34766	-	29,58984	-

A kéttámaszú gerenda mért sajátfrekvenciáinak arányai						
Az egyes állapotokon belüli összehasonlítások						
Arány	f_{641}/f_{661} f_{642}/f_{662} f_{643}/f_{663}	f_{621}/f_{641} f_{622}/f_{642} f_{623}/f_{643}	f_{441}/f_{461} f_{442}/f_{462} f_{443}/f_{463}	f_{421}/f_{441} f_{422}/f_{442} f_{423}/f_{443}	f_{241}/f_{261} f_{242}/f_{262} f_{243}/f_{263}	f_{221}/f_{241} f_{221}/f_{241} f_{221}/f_{241}
i	4-66(64)(62)00 j. tartó		4-46(44)(42)00 j. tartó		4-26(24)(22)00 j. tartó	
1	1	1	1	1	1	1
2	1	0,913044	1	1,173913	0,758621	1,075757
3	1,009804	0,990291	1,010101	1,070000	-	-

A kéttámaszú gerenda mért sajátfrekvenciáinak arányai						
Összehasonlítások az egyes állapotok között						
Arány	f_{461}/f_{661} f_{462}/f_{662} f_{463}/f_{663}	f_{261}/f_{661} f_{262}/f_{662} f_{263}/f_{663}	f_{441}/f_{641} f_{442}/f_{642} f_{443}/f_{643}	f_{241}/f_{641} f_{242}/f_{642} f_{243}/f_{643}	f_{421}/f_{621} f_{422}/f_{622} f_{423}/f_{623}	f_{221}/f_{621} f_{221}/f_{621} f_{221}/f_{621}
i	4-66(64)(62)00 j. tartó		4-46(44)(42)00 j. tartó		4-26(24)(22)00 j. tartó	
1	0,971428	0,971428	0,971428	0,971428	0,971428	0,971428
2	1	1,260870	1	0,987440	1,285715	1,126984
3	0,970588	-	0,970874	0,980582	1,049020	-

- o a gerenda mindhárom elcsúszásbeli állapotáról elmondható, hogy a mért első sajátrezgésszám értékét az állapoton belüli változások nem érintették, azaz az

egymás melletti értékek – pl. az az f_{641} az f_{661} -hez, ill. az f_{621} az f_{641} -hez – hányadosa egy. A gerenda nagyobb elcsúszására az első változáskor reagált a gerenda első sajátrezgésszáma. A második elcsúszásnövekedés az első sajátfrekvenciákat a második és a harmadik állapotban nem befolyásolta;

- o a második sajátrezgésszám a rugalmas csukló nagyobb elfordulására változott, először csökkent, majd nőtt, végül kisebb arányban ugyan, de ismét nőtt. A harmadik sajátrezgészám változása az előbbi tendenciát mutatja. Kivéve a leggyengébb állapotú tartót, mert ott a korábbiakhoz hasonló mértékű sajátfrekvencia nem volt mérhető. Nevezük a csökkenéseket regulárisnak, ezek mértéke általában 3% alatt van, de előfordul a 8-17-24% is. – Ha a sajátfrekvenciák változását a kategóriákon belül a legerősebb tartó értékeihez viszonyítom (pl. az f_{461} és az f_{261} jelűt az f_{661} -hez), akkor az első sajátfrekvencia végig nem változott, a második csökkent-nőtt-csökkent, a harmadik, ahol van eredmény, általában csökkent.

A 7., 8. és 9. táblázat tartalmazza a vizsgált tartók mért sajátfrekvenciáinak változását. Ezeket összefoglalóan közli az alábbi táblázat:

14. táblázat

1-6666 j. tartó	1-6466 j. tartó	1-6266 j. tartó	1-4666 j. tartó	1-4466 j. tartó	1-4266 j. tartó	1-2666 j. tartó	1-2466 j. tartó	1-2266 j. tartó
45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179	45,1179
52,7348	53,0274	52,7348	52,7348	52,7348	52,441	52,1484	52,1484	51,8557
55,6646	55,9573	55,9573	55,9573	55,9573	55,953	55,666	55,666	55,6646

2-6666 j. tartó	2-6466 j. tartó	2-6266 j. tartó	2-4666 j. tartó	2-4466 j. tartó	2-4266 j. tartó	2-2666 j. tartó	2-2466 j. tartó	2-2266 j. tartó
18,16406	18,16406	19,04297	16,99219	16,6992	16,69922	16,11328	16,40625	15,52734
52,44141	51,85547	50,39063	48,63281	50,0976	49,80469	50,39063	50,09766	50,97656
66,21094	66,21094	71,77734	69,72656	68,5549	70,60547	70,01953	70,01953	69,43359

3-6660 j. tartó	3-6460 j. tartó	3-6260 j. tartó	3-4660 j. tartó	3-4460 j. tartó	3-4260 j. tartó	3-2660 j. tartó	3-2460 j. tartó	3-2260 j. tartó
19,62891	18,16406	17,87109	18,16406	17,87109	18,16406	19,04297	19,62891	19,04297
57,42188	62,40234	-	62,69531	62,69531	62,40234	62,69531	65,33203	52,44141
75,29297	70,89844	71,19141	71,77734	72,07031	71,77734	71,77734	72,07031	65,03906

4-6600 j. tartó	4-6400 j. tartó	4-6200 j. tartó	4-4600 j. tartó	4-4400 j. tartó	4-4200 j. tartó	4-2600 j. tartó	4-2400 j. tartó	4-2200 j. tartó
10,25391	10,25391	10,25391	9,960938	9,960938	9,960938	9,960938	9,960938	9,960938
20,21484	20,21484	18,45703	20,21484	20,21484	23,73047	25,48828	19,33594	20,80078
29,88281	30,17578	29,88281	29,00391	29,29688	31,34766	-	29,58984	-
54,49219	54,19922	53,90625	54,49219	54,49219	54,49219	54,78516	54,78516	54,78516
65,62500	65,03906	65,03906	65,03906	65,03906	65,03906	64,74609	64,74609	64,74609
74,70703	74,41406	74,41406	74,12109	74,12109	73,82813	73,82813	73,82813	73,53516
86,42578	84,96094	84,37500	84,08203	84,08203	83,78906	83,78906	83,78906	83,78906

Levonható-e mindezek után valami konzekvencia további vizsgálatok nélkül? – A fentiekből tiszta, elméletileg hiánytalanul megalapozott következtetés nem vonható le, de tendencia megfogalmazható a sajátfrekvenciák változásának mértékét és irányát illetően:

- az egyes tartók közötti statikai különbség
 - **1:** térben kitámasztott kettős feszítőmû **2:** kettős feszítőmû
 - 3:** egyszeres feszítőmû **4:** kéttámaszú tartó –
- elég nagynek tűnt ahhoz, hogy – előzetes számítások szerint – jelentős különbség legyen érzékelhető a sajátfrekvenciákban. Ez a markáns eltérés látszik az első sajátfrekvenciában az **1** j. tartó és a többi közt: az első sajátfrekvencia végig állandó, nagysága és a harmadik sajátfrekvencia nagysága között kb. 10 Hz különbség van. A másik háromnál ez a különbség 50 – 70 Hz, és az első a többi tartónál nem állandó. Az **1** j. tartó második sajátfrekvenciája is jellemzően állandó, ill. egy-egy állapotban nő ill. csökken. A négy tartót összehasonlítva az **1** j. a legmerevebb, az egyes állapotok változásai ezen tartónál okozták a legkisebb frekvenciabeli változásokat;
- a **4** j. tartónál az első sajátfrekvencia a legalacsonyabb a négy tartó között, ezen tartó negyedik – hatodik sajátfrekvenciája mérhető össze az első tartó második – harmadik sajátfrekvenciájával. A sajátfrekvenciák változása jellegének összefoglalását a 100. oldalon olvashatjuk;
 - a **2** j. és a **3** j. tartók sajátfrekvenciáinak változása az egyes állapotokban jellemzően 3% körül van, ill. ha több, akkor a 10% körüli csökkenés a jellemző.

A tetőszerkezetekben szokásos fatartókat próbálja utánozni a laboratóriumi kísérlet során vizsgált négy db. szerkezet. Dinamikai vizsgálatukból megállapítható, hogy

1. A sajátfrekvenciák 1% körüli változása mérésnél a csillapítás módosulása (több repedés kialakulása, a nedvességtartalom változása, a kötések lazulása, stb.) és számításnál a csillapítás figyelembe nem vétele miatt is lehetséges, így a változás ezen mértéke következtetések levonására alkalmatlan.
2. Az első sajátfrekvencia változatlansága nem jelenti azt, hogy a dinamikai jellemzőket (pl. a felharmonikusokat) az idő múlása nem befolyásolja. Dinamikai megfigyelés esetén legalább három – de inkább hat – sajátfrekvenciát detektálni kell.
3. A frekvenciák 3% körüli változása (elsősorban csökkenése) szerkezeti módosulásra utalhat.
4. A sajátfrekvenciák változásának mértéke függ a szerkezet jellegétől, térbeli viselkedésétől, a megtámasztások irányától, ill. ezen paraméterek esetleges meg-

változásától. A tömeg mindenkori elrendezésétől. A szerkezet tömege és a hordott tömeg arányától.

5. A válaszjelekből készíthető csillapítási görbe utal a szerkezet linearitására. Ha a mérésekből számított csillapítás, vagy annak jellege állandó, akkor a szerkezet gyakorlatilag lineáris.
6. Lehetnek olyan kisebb, nem a hajlítási merevség csökkenésével együttjáró tartószerkezeti változások (elfordulás, függőleges síkú tartószerkezet vízszintes elmozdulása, alátámasztó lábak elferdülése, stb.), amelyek a sajátfrekvenciák növekedését eredményezik, ezáltal a tartónak az idő múlásával járó merevség-csökkenését esetleg kompenzálják, ill. marad az emelkedő érték.
7. A dinamikai jellemzők változását vizsgálva el kell döntenünk, hogy két különböző időpontban végzett mérés összehasonlítható-e? Azaz egy esetleges változás/változatlanosság minek lehet a következménye?
8. Mivel a faszervezetek aránylag könnyű és pl. anyagukban (a tömegben is), kapcsolataik mozgásában változó szerkezetek, dinamikai vizsgálatuk kevesebb eredményt ígér, mint a beton- vagy acélszerkezeteké. Faszervezeti hibák detektálására a dinamikai vizsgálat nem igazán alkalmas.

Persze egyáltalán nem igaz az, hogy a dinamikai vizsgálatoknak, akár mint anyagvizsgálatnak, akár mint roncsolásmentes szerkezeti vizsgálatnak a faszervezetek területén ne lenne létjogosultsága! – Az ítélet, mely szerint a dinamikai vizsgálatok nem igazán alkalmasak a hibák detektálására, a régi faszervezetekre vonatkozik. Ugyanis ezeknél lehetetlen az első, ún. „szűz” vizsgálatokkal a dinamikai állapotfelvétel, amelyhez képesti változásokból vonhatók le következtetések. Egyre inkább a kis változásokhoz képest is pontos gyártás terjed el (számítógép vezérelte szerkezeti elemek gyártása), lehetőség van az új szerkezetek megépülés utáni azonnali állapotfelvételére, a változások nyomon követésére. A laboratóriumi és elméleti kutatások egyre inkább fényt derítenek a változások okainak egyértelműsítésére, az ok-okozati viszonyok kiderítésére, a külső körülmények miatti hatások leválasztására.

A mostani vizsgálatok is mutatják azt, hogy a csillapítás elhanyagolása a változások okának kiderítése aspektusából adatvesztéssel jár. A számítások ma rendelkezésre álló eszközeivel figyelembe kell vennünk a csillapítást. Ez csak akkor lehet eredményes, ha mérésekkel is meghatározzuk a vizsgált esetekben a csillapítást, azaz ezt is dinamikai jellemzőnek tekintjük a sajátrezgésszámok, sajátmódusok, rezgésalakok mellett. A csillapítás mértéke a számíthatóságot teszi lehetővé, a jellegének meghatározása pedig elősegíti annak eldöntését, hogy figyelembe vehető-e a linearitás, avagy el kell azt vetnünk.

7. ÖSSZEFOGLALÁS

Az 1970-es és 80-as években szerettem volna a mindennapi mérnöki munkán túlmutató elméleti kutatómunkát végezni a stabilitáselmélet, közelebbről a kifordulásvizsgálat témájában. Irodalomkutatás közben/után rádöbentem, hogy az én körülményeim (adottságaim) közepette ebben a teljesen elméleti témában nem tudok hasznosat összehozni. A matematikai szakmérnöki záródolgozatom²⁹ készítése közben tevőlegesen megismerhettem az elméletet ennek matematikai eleganciájával együtt. – Erről a kutatásról a szakmérnöki állami vizsga után lemondtam. (Amikor a 80-as évek legelején megismertem a témakört teljesen átfogó művet³⁰ és megtaláltam benne mindent, amire egy mérnöknek ezen a területen szüksége lehet, végképp megnyugodtam korábbi döntésemben.)

A korábbi kutatások végét az is befolyásolta, hogy a hídszerkezetek vonatkozásában rátaláltam új témakörökre, nevezetesen a dinamikára, a szerkezetek dinamikai vizsgálatára.. Alkalmazásuk nagyon hasznosnak és Magyarországon is elterjedőben lévőnek tűnt. Nagyon sok magyar hídszerkezet u.n. öregedésvizsgálatát végeztük el dinamikai mérésekkel. Az akkori KTMF Hídépítési Tanszékének színeiben. Nekifogtam a téma feldolgozásának. Ennek eredményeként sok dinamikai tárgyú könyvet és szócikket ismertem meg, kapcsolatba kerültem a téma magyar és külföldi művelőivel. Nagyrészt az irodalomkutatásom, valamint az addig elvégzett munkáim eredményeinek összefoglalása volt a Műegyetemen megvédett doktori disszertációm³¹ témája.

A felkutatott irodalmat és azok rövid ismertetését a Melléklethez csatoltam [M1-M29]. A kísérleti jegyzőkönyv kivonatához kapcsolt Epilógus sorolja fel a kifejezetten dinamikus szerkezetvizsgálatokkal foglalkozó – részben saját – tanulmányozott szakirodalmat [C1-C33] az általam elvégzett, nagyrészt a téma iránti érdeklődéshez vezető munkák felsorolásának keretén belül. Úgy gondolom, talán nem érdektelen az elvégzett mérnöki munkák folyamatának szemlélhetősége az elvégzett mérési és feldolgozási tevékenység tükrében. – A felsorolt irodalom egy-egy konkrét elemére való határozott utalás nem mindig volt lehetséges, ezért sok helyen nincs hivatkozás. A tanulmányozott, de a disszertáció témájával szorosán nem összefüggő szakirodalmat felsorolom amiatt is, hogy a továbblépés a téma iránt érdeklődőknek egyszerűbb és eredményesebb legyen.

A dinamikai vizsgálatok folytatódtak, magasépítési vasbeton szerkezeteken és falazott szerkezeteken is, de anélkül, hogy teljes egészében átláttam volna, hogy mennyire igaz az, amit a szakirodalom alapján hirdetünk, hiszen komolyabb vizsgálat hiányában csak ezt tettük. – És nem biztos, hogy ez hosszú távra elegendő!

Az 1990-es években szerettem volna az addigi munkáim összefoglalásaként a szerkezetek dinamikai vizsgálatával kapcsolatos tapasztalataimat összefoglalni. A dinamikai vizsgálatok iránti megrendelői érdeklődés lankadt, amit annak is betudhattam, hogy a sok jelentés igazát még senki sem tapasztalhatta meg – legalábbis Magyarországon széles szakmai – felhasználói körben nem –, hiszen az elméleti következtetéseket ellenőrizni nem lehetett, ezek a valósággal soha nem szembesültek.

²⁹ [C1] LŐRINCZ György: *A sajátértékelmélet összegezési tételeinek alkalmazása a felfüggesztett gerendák kifordulásvizsgálatában.* (Szakmérnöki záródolgozat, BME, Budapest, 1977.)

³⁰ PETERSEN, Christian: *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen.*

(Friedr.Vieweg &Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1. Auflage 1980, 2., durchgesehene Auflage 1982.)

³¹[M23] LŐRINCZ György: *Hídszerkezetek állapotának meghatározása elméleti és kísérleti alapon.*

(Műszaki egyetemi doktori értekezés, kézirat, BME, Budapest, 1985.)

7.1. LABORATÓRIUMI MÉRÉSEK

Mivel a megépült szerkezetek dinamikai tulajdonságainak változása, ezek valamely szerkezeti változáshoz való egyértelmű hozzákapcsolhatósága érdekelt, a laboratóriumi mérések céljára olyan szerkezetet terveztem és építettem, amelynek minősége, pontossága nem haladja meg az ácsolt faszerkezetekét. (A labortartó tervét a **Kísérleti jegyzőkönyvhöz** mellékeltem.)

A fatartót fokozatosan lebontva egyszerűsödik a vizsgálandó szerkezetet. Mindegyik szerkezet/állapot hajlítási merevsége a gerenda fainak egymáson való elcsúszásának módosításával – a gerendák közötti átmenő csavaros kapcsolat gyengítésével-erősítésével – könnyen változtatható. *Sajnos, a kapcsolat erősségét nem mértem eléggé pontosan, és ez akadályozta a tartó pontos statikai vázának felállítását.* – Az egyes tartók kialakítását, a mérési tervet és a mérési eredményeket a **Kísérleti jegyzőkönyv** tartalmazza.

Ennek 1. pontjában ismertetem a laboratóriumi mérés előkészítését, a tervezett és elvégzett mérés-sorozatot. Mindegyik tartó statikai és dinamikai mérését elvégeztem, a mérési eredményeket rögzítettem, és összeállítottam a jegyzőkönyvet úgy, hogy a gépi egységeket átszámítottam metrikus értékekre, hogy lehetővé tegyen feldolgozásukat. – Eredeti tervem az volt, hogy a teljes mérést feldolgozom, és ebből vonom le következtetéseimet. Ez azonban egyedül elvégezhetetlenül nagy munka lett volna, nem tudtam vállalni. Akkor radikálisan egyszerűsítettem a tervemet, megelégedtem egy tartóval, a kéttámaszú, részben kétfás gerendával. Ez mindegyik vizsgált eset része volt, csak a megtámasztása változott. Vizsgálata szükséges akkor is, ha pl. a térben kitámasztott kettős feszítőmű statikai vázát akarom megfogalmazni. (A másik három eset statikus mérési eredményeit a melléklet **Kísérleti jegyzőkönyv kivonatában** nem közlöm, csak a mérések összeállítását és elvégzését, így az eredeti 115 oldalas számhalmaz 87 oldalra zsugorodott. És csak a kéttámaszú gerenda statikus mérései eredményeit közli, a • és az • j. tartókét, valamint mindegyik tartó, a feldolgozás tényén kívül további vizsgálódásra csak térképszerűen alkalmas rezgésyorsulásait és frekvenciáit. A **Kjv. 46. oldalán emlegetett átlag csak láttatási és nem feldolgozási kategória!**)

Ezen pénzben és időben korlátozott egy db. ácsolt minőségű fatartó statikus és dinamikus méréseiből kisérelek meg levonni általánosnak tűnő tapasztalatokat.

A disszertáció előzményei (1. pont) valamint a laboratóriumi mérés (2. pont) és feldolgozás eredményei (Kjv.) után összefoglalom a **Disszertáció** és a **Melléklet** elkészítését és eredményeit.

7.2. A STATIKAI VÁZ MEGHATÁROZÁSA

Az egyszerű feladatmegoldásra vonatkozó kezdeti elképzeléseim — mérés, feldogozás \Rightarrow a pontos statikai váz meghatározása \Rightarrow a mért és számított lehajlások egyeztetése \Rightarrow az egyértelmű anyagjellemzők meghatározása \Rightarrow lehajlások kiszámítása egységerőre \Rightarrow a merevségi mátrixok felállítása \Rightarrow dinamikai jellemzők meghatározása \Rightarrow a dinamikai változások elemzése \Rightarrow következtetések — a mérési eredmények pontosabb ábrázolása során kissé módosultak. Ugyanis nyilván semmi nem a tiszta elmélet szerint nézett ki, felismerhetők voltak az ábrák, az eltéréseket általában meg lehet magyarázni, meg lehet érteni.

Először összefoglaltam az anyagi pontok és azok rendszere, a **lineáris** viselkedésű anyagból épített **lineáris** szerkezetek dinamikai megoldását (3.) a rendelkezésre álló bőséges és kiváló szakirodalom (1.3.4.) alapján. Általánosságban, majd konkrétan az én esetemre, a három szabadságfokú diszkrét rendszerre.

Hangsúlyozom, hogy nem akartam a **nemlineáris** viselkedés szerint tárgyalni a problémát, mert ugyan pontosabbnak, de nehezebben követhetőnek éreztem. Faszervezetről lévén szó, célszerűbbnek látszott először a lineárisal próbálkozni, mert egyébként az ismeretlen mennyiségek száma bővült volna, a feldolgozás esélye pedig csökkent volna. Nem lineárisan.

A felső gerenda hossza 7 m. Annak idején nem volt megfelelő szállítójármű, emiatt két darabban hozták. Tehát a gerendát toldani kellett. Rálapolással, kétoldali hevederrel és átmenő csavarokkal csatlakoztattuk a két gerendavéget. Nevezzük ezt a toldást rugalmas csuklónak, amelynek elfordulási tulajdonságai/rugóállandója ismeretlen. Szükségszerű kialakításából az alábbi előny és hátrány adódik:

- az átmenő csavarokban lévő erő változtatásával a kapcsolat rugóállandója, így a kapcsolat elfordulása változtatható, amelynek hatásai mérhetők. A két fa elcsúszásának befolyásolása mellett ez is egy másik lehetőség arra, hogy az egyes tartók állapotát változtassuk;
- az elfordulások nagysága érdektelen, de a külső teher okozta nyomaték változására szükségünk van, hogy lehajlást tudjunk számolni. Ez a nyomaték legyen az **M** érték, amely jelenti a 'c' pontban létrejött elfordulás okozta nyomatékváltozást (6. és 9. ábra);
- teljes geometriai szimmetria esetén is felborult volna az, hogy a tartó bal- és jobb oldalán, a középső km.-től azonos távolságra lévő pontok függőleges elmozdulása megegyezik. Egy helyszínen gyártott fatartó pedig soha nem lesz geometriai-

lag szimmetrikus! – Ami csak akkor baj, ha mért és számított eredményeket egyeztetünk.

A felső és az alsó fa egymáson való eltolódását átmenő csavarokkal gátoltuk. A csavarokban lévő tengelyirányú erő az anyák meghúzásával/megengedésével változtatható. Az elcsúszás nagyságától függ a kétfás tartó hajlítási merevsége. A változás statikai és dinamikai következményeit mértem. Ezen értékek feldolgozása során az alábbi ismeretlen értékeket és közelítéseket vettem figyelembe (Dissz. 5.2.2.4., és az eredmények 5.2.2.5.):

- a két fa egymáson való elcsúszása miatt az összetett km.-ek tehetetlenségi nyomatéka csökken, és a hajlítási merevség csökkenésének mértékét fejezi ki az a_1 ;
- nem azonos pontosságú a szélső keresztmetszetekben valamint a középső km.-ben számítható lehajlás értéke (e_{3sz} és e_{6sz} , valamint e_{45sz}). Ezért felvettem ismeretlenként a k számot, a középső km. lehajlásainak korrekcióját is, tehát a középső km. számított lehajlása $f \cdot e_{45sz}$;
- megpróbálkoztam az inerciák pontos közelítésével úgy, hogy a mért km.-i méretekből meghatározott tehetetlenségi nyomatékokra a Spline iterációval görbét fektettem, és a tartó tengelye mentén változó ismert függvényként vettem figyelembe az inerciákat, így a merevséget is. Ez nagyon lelassította a számítást, ami elviselhető lett volna, de relatíve nem hozott lényeges eredményt. Nem alkalmaztam. Így mind a bal oldalon, mind a jobb oldalon a két egyfás szakasznak (I_{21} és $I_{87} = k_1 I_{21}$) és a két kétfás szakasznak (I_b és $I_j = k \cdot I_b$), van egymástól eltérő inerciája. Így az egyes szakaszok (baloldali egyfás és kétfás, jobboldali kétfás és egyfás) hajlítási merevségének értékei balról jobbra:

$$k_1 \times K_1 \quad K_0 = E_h \times a_1 \times I_b \quad k \times K_0 \quad K_1 = E_h I_{21}$$

- az első mérésekből (Melléklet 1.1.2 és 1.1.3. valamint 1.4.2.) több esetben meghatároztam a tartó anyagának E_h rugalmassági modulusát valamint a g^2 elcsúszási relációt, ill. ennek g négyzetgyökét. Az ellenőrzések során az alábbi, figyelembe vett értékek jónak bizonyultak:

$$E_h = 4400 \text{ N/mm}^2; G_h = 220 \text{ N/mm}^2 (G_h \approx E_h/20);$$

$$6,0 \times 10^{-4} \text{ 1/mm} < g < 7,5 \times 10^{-4} \text{ 1/mm}$$

Az elcsúszás mértékét alig befolyásolta a csavarokban keletkező erő (5. táblázat), emiatt a g közeli értékek között változik. – A K elcsúszási modulus nem konstans, mert a csavarok egymástól mért távolsága nem állandó. Átlaga: 8,83 N/mm^2 . A csavarok elcsúszással szembeni C ellenállásának átlaga: 3860 N/mm ;

- a végleges megoldáshoz egy iteráció vezetett, azaz az először meghatározott értékekkel kiszámítottam a lehajlásokat, és ezeket viszonyítottam a mért lehajlásokhoz. A viszonyszám: $\bullet_0 = \mathbf{e}_m/\mathbf{e}_{sz}$. A viszonyzámmal módosítottam az összetett km. tehetetlenségi nyomatéka csökkenését kifejező korrekciós tényezőt: $\bullet = a_I/b_0$. Ezzel korrigálva az inerciát, az előző eredménynél pontosabbat kaptam, azaz a másodszorra számított lehajlások jobban közelítik a mért lehajlásokat, $\bullet = \mathbf{e}_m/\mathbf{e}_{sz}$, így az $|1 - b|$ á $|1 - b_0|$.

Elég hosszadalmas volt egy olyan statikai vázat felállítani, amelyen a számított lehajlások 3%-on belül megegyeznek a mért lehajlásokkal. Emiatt volt szükség a fenti tényezők figyelembevételére. És még fel kellett írni a középső 2/3-án kétfás tartó számítható differenciálegyenletét, amelynek megoldása eleget tesz a végpontokban és a közbenső keresztmetszetek alatt előírt kerületi feltételeknek (5.2.2.). Mivel három db lehajlást mértem, három ismeretlen mennyiséget (\mathbf{M} , a_I , k) tudtam meghatározni a középső szakaszán kétfás tartóra felírt egyenletből. A munkatételeket alkalmaztam (5.2.) és figyelembe vettem a nyírási alakváltozás munkáját is.

Az összes meghatározott jellemzőt a Melléklet M20, M21, M22. sz. táblázatai tartalmazzák. A differenciálegyenletet előbb összetett keresztmetszetű tartókon, azaz hevederlemezzel erősített acélgerendán, többfás fagerendán és acél-beton öszvérgerendán is alkalmaztam. (4.)

Végül a kéttámaszú tartó minden egyes vizsgált esetére (három egymástól eltérő vízszintes elcsúszást és a rugalmas csukló három különböző rugóállandóját állítottuk elő, így a 9 db vizsgált állapot: (4) a tartó jele – (6,4,2) a vízszintes elcsúszást és (6,4,2) a csukló elfordulását létrehozó tengelyirányú csavarerő nagysága (kp) – (0,0) nincsenek kitérítések:

4-6600, 4-6400, 4-6200 4-4600, 4-4400, 4-4200 4-2600, 4-2400, 4-2200)

A tartó statikai leírása után a nem mért terhekre is meghatározhatók a lehajlások. Az egységteherre való számításokhoz eldöntendő a sarkalatos probléma, azaz a tartó szimmetriája és linearitása. A terhelés szimmetriáját és linearitását valamint az alkalmazott anyagok lineáris viselkedését elfogadjuk. (Az alkalmazott anyagok rugalmassági modulusa állandó.) A tartó szerkezet kialakítása nem szimmetrikus. A gyakorlati eseteknél nem jobban, de változnak a méretek, az alátámasztások helyei, a közbenső szakaszon kialakított kétfás szakasz felületeinek illeszkedése, az együttlőgöztetés erőssége és hatékonysága. (A \mathbf{K} elcsúszási modulus és a g^2 elcsúszási reláció nem állandó.) A felső gerenda toldása sem szimmetrikus, valamint a toldási szakaszon relatív elfordulás lehetséges. (Ezen kialakítás nem idegen a gyakorlattól.) A határállapotra épülő méretezés esetén ezen egyenlőtlenségek nem játszanak szerepet. Esetünkben azonban, amikor mért és elméleti adatokat egyeztetünk, s emiatt érzékenyebb elméleti megfontolásokat kell tennünk, a szimmetriától való eltérésnek az

egyeztetés eredményességét nehezítő következménye van, vagy a megoldhatatlanságig bonyolított sokparaméteres vázat kell felvennünk. Ezen utóbbinak nincs értelme, mert általánosabb következtetések nem vonhatók le. – Felvettem egy, a lehető legtöbb sajátosságot figyelembe vevő szimmetrikus modellt. (7. ábra)

Az elcsúszási ábrák (Melléklet 1.4.5.1.) vizsgálatából az alábbiak következnek:

- az elcsúszási ábrák nem szimmetrikusak, a relatív elcsúszási ábrák pedig nem antimetrikusak. A jelenségek mindkét fajtája azonos abban a tekintetben, hogy a görbék jobb és a bal oldala egységesen tér el egymástól mindegyik terhelő erő és mindegyik állapotú tartó esetén. A kétfás szakasz bal végén az elcsúszások kisebbek, mint a kétfás szakasz jobb végén.
- az elcsúszási görbék szélsőértékének helye a felső gerenda toldása alá esik. Itt kell feltételeznünk a rugalmas csuklót (M11. és M12. táblázat):

Az elcsúszási ábrák szélsőértékének helye	5-66	5-46	5-26
	0,663	0,654	0,655

A fenti értékek állapotonkénti átlagok. A pontos hely pontosan nem meghatározható. Legyen a rugalmas csukló feltételezett helye a három fenti érték középértéke:

$$x_c=0,658$$

Az elcsúszások feldolgozása is azt a megállapítást támasztja alá, hogy a szerkezeti viselkedés nem lineáris. Azaz az erő és az elcsúszások közötti összefüggés nem lineáris és változik a tartó állapotától és a terhelő erőtől függően. Az 5 és 10 kN nagyságú terhelésre nem tételhetünk fel linearitást, de a 15, 20 és 25 kN terhelésre igen. (Ennek a hajlékonysági mátrix számításánál van különös jelentősége.) Ugyanis a mátrix elemei egységnyi terheléshez rendelt lehajlásokat tartalmaznak, tehát vagy az alkalmazott terhekből keletkező lehajlásokat arányosítjuk – a mátrix középső oszlopa –, vagy egységteherre végezzük el a számításokat a mátrix két szélső oszlopa elemeinek meghatározásához. (Melléklet 4.2.)

Végül is a sok változás figyelembe vétele – a hajlítási merevséget változtattam folytonosan is és szakaszosan is; az összetett tartóknál mért értékeken alapuló nem állandó elcsúszási modulust vettem figyelembe, ami akadályozta a differenciálegyenlet megoldását; megróbáltam az elcsúszott keresztmetszetek inerciáját az elcsúszások nagyságától függővé tenni és függvényyszerűen megfogalmazni – ellehetetlenítette a megoldást, és arra döbbenett rá, hogy alapvetően nem a terhelés és a lehajlás közötti kapcsolat lineáris/nemlineáris jellege határozza meg a megoldást, hanem az, hogy minek érdekében vizsgálódom, mennyire érzékeny a szükségszerűen közelítéseken alapuló számításom a modell hibáira? **Mert**

nem az a kérdés, hogy mennyire pontatlan a modell, hanem az, hogy mennyire kell pontosnak lennie? Van-e gyakorlati haszna a kis változások nyomkövetésének? Az építőiparban alkalmazott mechanikához elégséges a lineáris modell. Ugyanis a valóságot jobban megközelítő számítási eredményeknek olyan következménye lehet pl., hogy a gerenda számított keresztmetszete lehet valamivel kisebb, a határfeszültséget nem tudom kihasználni, a számított lehajlás valamivel kisebb lesz, a szerkesztési szabályokban előírt minimális méreteknél elég lenne kisebb, a gyártott/előírt minimum esetében szilárdságtanilag túlzás, stb. Azaz a pontosabb számításnak kevés értelme van!

Tehát maradt a lineáris modell az alábbi tulajdonságokkal:

- a szerkezet rugalmasan viselkedik, azaz érvényes Hook törvénye. Az elcsúszások arányosak a csúsztatóerővel, arányossági tényező a K elcsúszási modulus, azaz az egységnyi relatív elcsúszáshoz szükséges csúsztatóerő;
- a felső gerenda toldása miatt kialakított rugalmas csuklóban keletkező elfordulások nyomatékkal arányosak, arányossági tényező a k rugóállandó, azaz az egységnyi elfordulást előidéző nyomaték. A csukló jellemzői ismeretlenek, és a csavarokban lévő tengelyirányú erő változásával módosulnak. Hatását legegyszerűbb az M nyomatékugrással figyelembe venni;
- a rugalmas viselkedés legalább annyit jelent, hogy tartószerkezet lehajlásainak matematikai leírása a rugalmasságtan segítségével gyakorlatban elfogadható eredményeket ad;
- a K elcsúszási modulus és a k rugóállandók nagysága nem függ a külső terheléstől;
- az E és a K a tartó tengelye mentén állandó. Ugyancsak szakaszonként (egyfás-kétfás) állandó a keresztmetszet is, valamint a tartó kialakítása (elvileg) szimmetrikus, a terhelés egy db. koncentrált függőleges erő a középső keresztmetszetben;
- a nyíróerőből keletkező alakváltozási munka nagysága elhanyagolható, de az elérhető nagyobb pontosság érdekében azt is figyelembe vesszük.

A felsorolt feltételezések megfelelnek az általános gyakorlatnak, a szabványok engedélyeinek. Azonban a tervezés/ellenőrzés során alkalmazott modellnek nincs olyan kontrollja, amelynek során mért és számított értékeket egyeztetünk, mint esetünkben a lehajlásokat. (Hiszen így lehetséges ismeretlen értékek meghatározása.) Arra kell törekednünk, hogy az ismert nemlinearitásokat minél jobban figyelembe vegyük.

Persze a véges elemek alkalmazásával fel tudjuk írni a valóságot leginkább megközelítő modellt, ugyanis ebbe minden változás beépíthető, ha a felosztásunk igazodik a változá-

sokhoz, és a szakaszok olyan kicsik, hogy két csomópont között minden lineárisnak tekinthető, csak ez óriási lineáris egyenletrendszerre vezet. Ez lesz a következő lépés!

A hajlékonysági/merevségi mátrixokat a mért értékekre fektetett görbék, az arányosítással meghatározott \mathbf{M} nyomaték és a rugalmas csukló elfordulását nem figyelő lineáris modell számításai alapján határoztam meg (Melléklet 4.2. és Dissz. 6.2.), de az elvileg szimmetrikus elemeket átlagértékek helyettesítik.

7.3. DINAMIKUS VIZSGÁLATOK ÉS EREDMÉNYEK

Az adott körülmények között pontosan meghatározott statikai vázon meghatároztam a \mathbf{H} hajlékonysági mátrixokat (Mell. 4.2.) és a \mathbf{K} merevségi mátrixokat (Dissz. 6.2.) a vizsgált tartó kilenc állapotában. Az \mathbf{M} tömegmátrix ismeretében (Dissz. 3.2.) az elhanyagolható csillapításúnak vett tartó dinamikai jellemzői meghatározhatók. Kiszámítottam a sajátfrekvenciákat (Dissz. 6.3.1.), a sajátalakokat (Dissz. 6.4.) és egy esetben a rezgésalakot (Dissz. 6.5.), amelyet mért alakkal hasonlítottam össze, miután a mért görbéken meghatározott csillapítás egy jellemző értékét állandónak tekintve kiszámítottam a csillapított rezgésalakot.

A mért rezgésgyorsulásokból a mérési válaszjelek feldolgozására készített **catman** program segítségével mindegyik tartó mindegyik állapotában meghatároztam a frekvenciaspektrumokat, és a felrajzolt spektrumok segítségével kiválasztottam azokból a sajátfrekvenciákat (Dissz. 6.3.2.). Az egyes értékek változásából, a mért és a számított jellemzők összehasonlításából a dinamikai vizsgálatokból alábbi következtetések vonhatók le:

1. A sajátfrekvenciák 1% körüli változása mérésnél a csillapítás módosulása (több repedés kialakulása, a nedvességtartalom változása, a kötések lazulása, stb.) és számításnál a csillapítás figyelembe nem vétele miatt is lehetséges, így a változás ezen mértéke következtetések levonására alkalmatlan.
2. Az első sajátfrekvencia változatlansága nem jelenti azt, hogy a dinamikai jellemzőket (pl. a felharmonikusokat) az idő múlása nem befolyásolja.
Dinamikai megfigyelés esetén legalább három – de inkább hat – sajátfrekvenciát detektálni kell.
3. A frekvenciák 3% körüli változása (elsősorban csökkenése) szerkezeti módosulásra utalhat.
4. A sajátfrekvenciák változásának mértéke függ a szerkezet jellegétől, térbeli viselkedésétől, a megtámasztások irányától, ill. ezen paraméterek esetleges megváltozásától. A tömeg mindenkori elrendezésétől. A szerkezet tömege és a hordott tömeg arányától.

5. A válaszjelekből készíthető csillapítási görbe utal a szerkezet linearitására. Ha a mérésekből számított csillapítás, vagy annak jellege állandó, akkor a szerkezet gyakorlatilag lineáris.
6. Lehetnek olyan kisebb, nem a hajlítási merevség csökkenésével együttjáró tartószerkezeti változások (elfordulás, függőleges síkú tartószerkezet vízszintes elmozdulása, alátámasztó lábak elferdülése, stb.), amelyek a sajátfrekvenciák növekedését eredményezik, ezáltal a tartónak az idő múlásával járó merevségcsökkenését esetleg kompenzálják, ill. marad az elmelkedő érték.
7. A dinamikai jellemzők változását vizsgálva el kell döntenünk, hogy két különböző időpontban végzett mérés összehasonlítható-e? Azaz egy esetleges változás/változatlanság minek lehet a következménye?
8. Mivel a faszervezetek aránylag könnyű és pl. anyagukban (a tömegben is), kapcsolataik mozgásában változó szerkezetek, dinamikai vizsgálatuk kevesebb eredményt ígér, mint a beton- vagy acélszerkezeteké. **Faszervezeti hibák detektálására a dinamikai vizsgálat nem igazán alkalmas.**

Œ j. tartó: térben is kitámasztott kettős feszítőmű



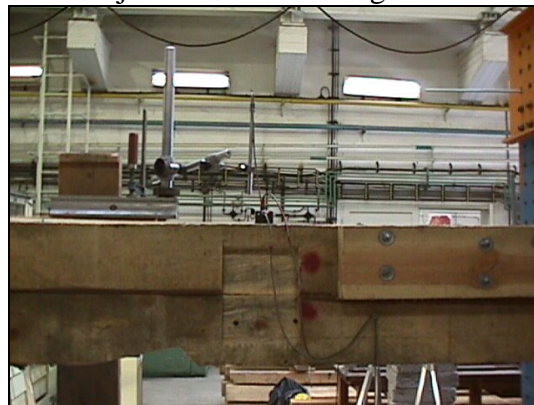
• j. tartó: kettős feszítőmű



Ž j. tartó: egyszeres feszítőmű



• j. tartó: kéttámaszú gerenda



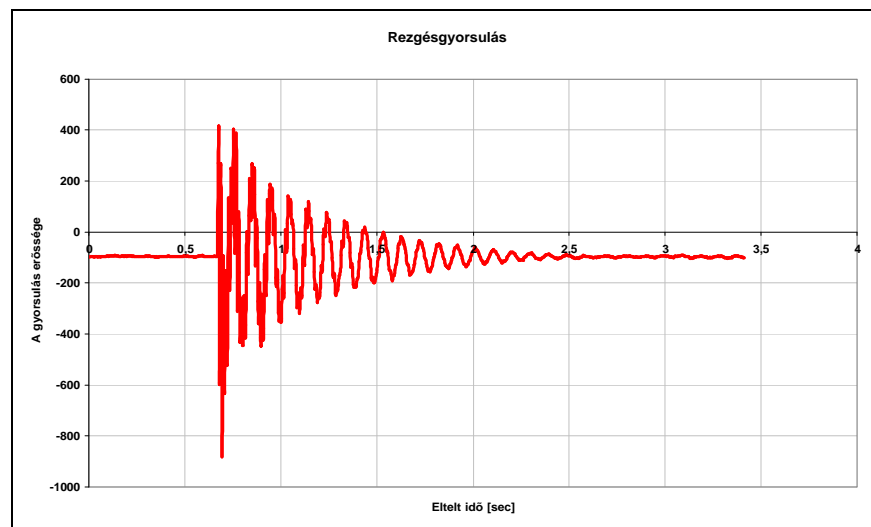
A fent mellékelt képek és a lenti ábrák bemutatják a munkám jellegét, azon statikai/dinamikai fogalmakat, amelyekkel foglalkoznom kellett, és amelyek illusztrálására ábrákat készítettem. A matematikai feldolgozást a **MAPLE**, a mérési feldolgozást pedig a **catman**⁰ programmal készítettem.

A mérések során a rezgésyorsulás válaszjeleket és az eltelt időt rögzítettük a mérési tervnek (**Kjv.**) megfelelően. Majd ezekből sebességet és kimozdulásokat számítottam s meghatároztam az egyes tartók különböző állapotaiban a frekvenciaspektrumot és a csillapítást:

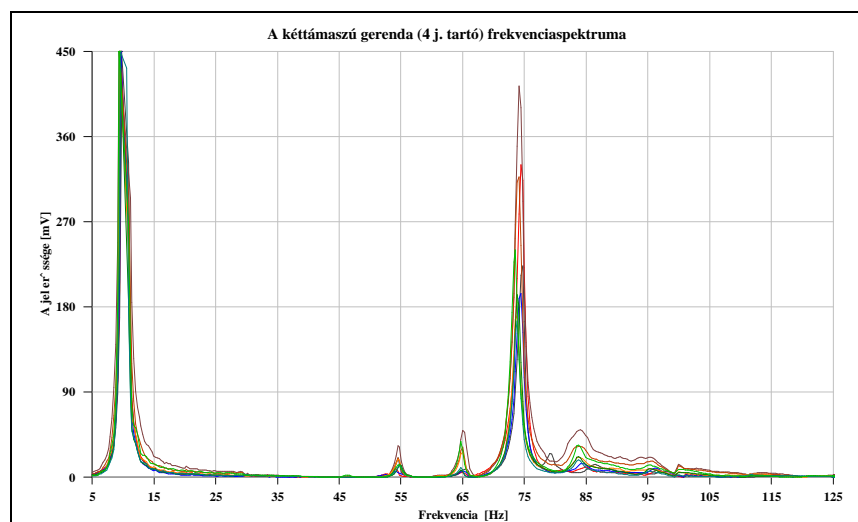
A mérések során a rezgésyorsulás válaszjeleit és az eltelt időt rögzítettük a mérési tervnek (**Kjv.**) megfelelően. Majd ezekből sebességet és kimozdulásokat számítottam s meghatároztam az egyes tartók különböző állapotaiban a frekvenciaspektrumot és a csillapítást:

A MÉRT DINAMIKUS JELEK FELDOGOZÁSA

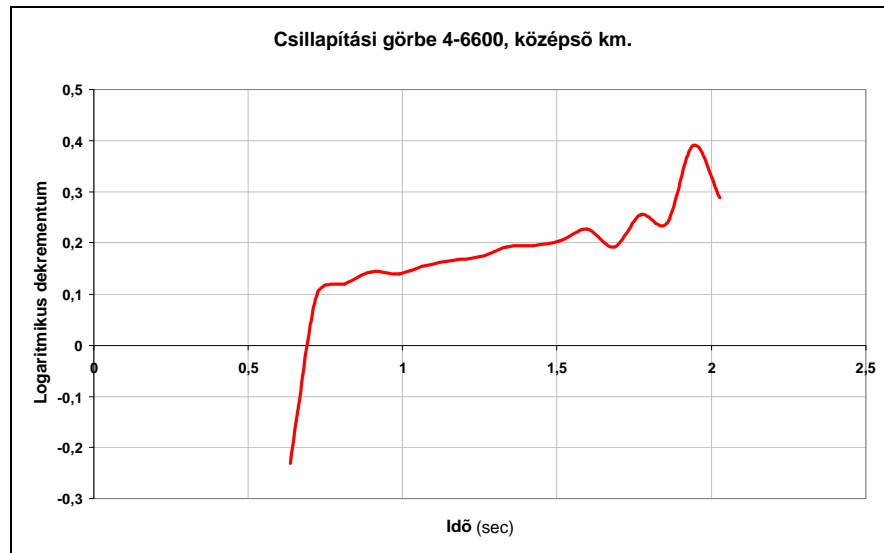
- rezgésyorsulás (középső km.)



- frekvenciaspektrum

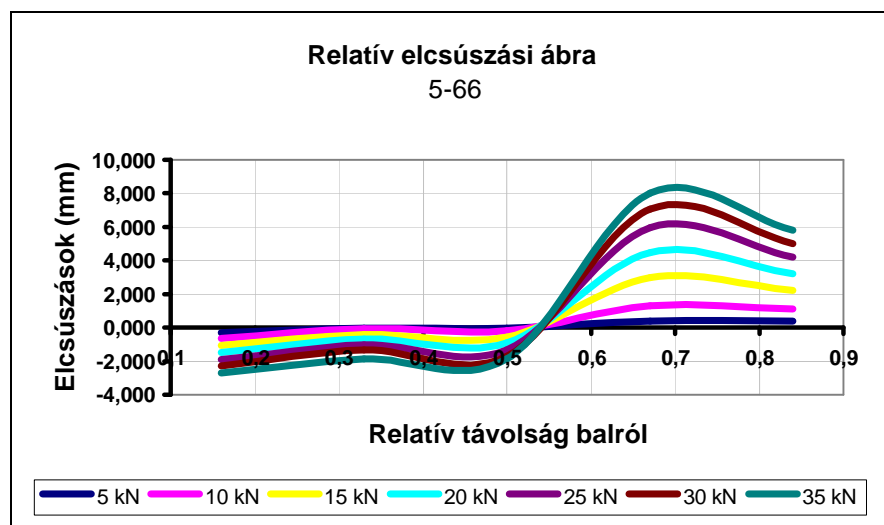
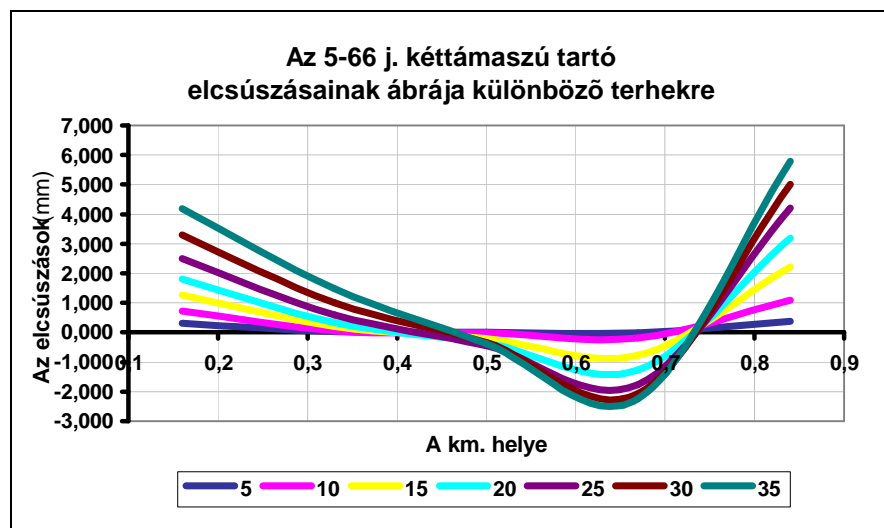


- csillapítás

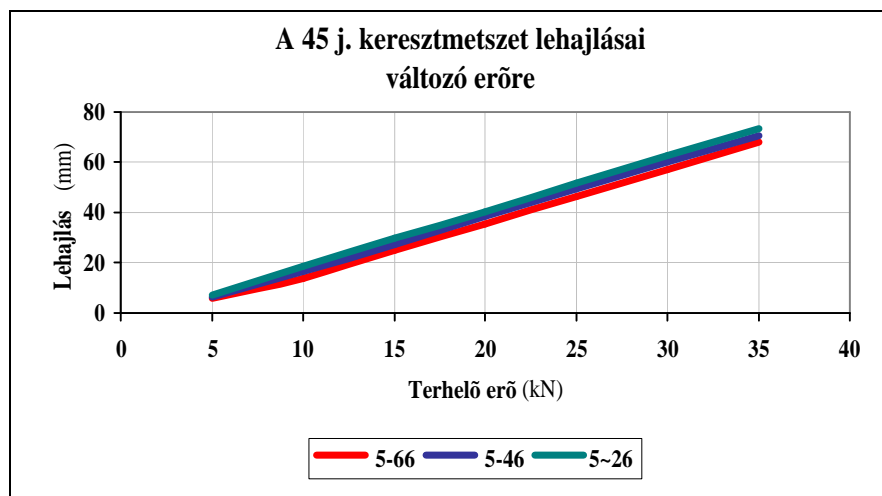
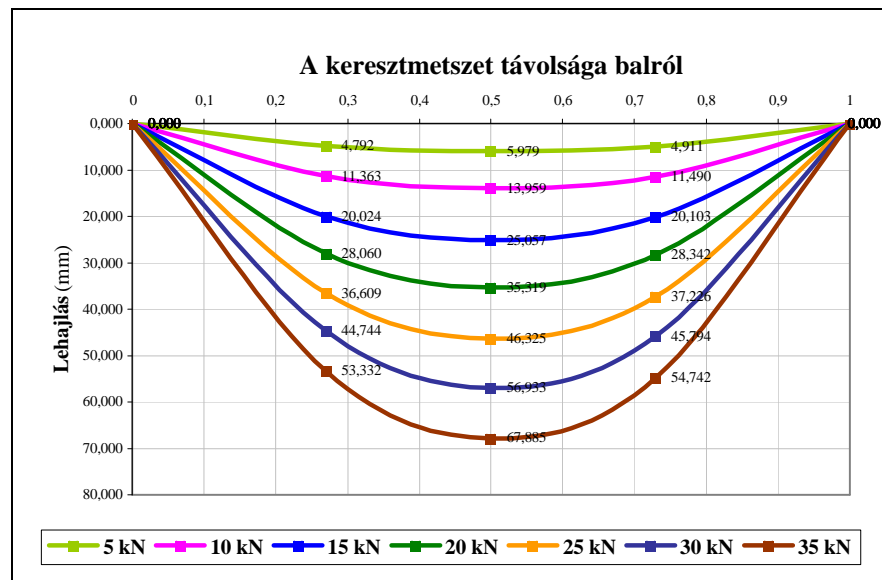


A MÉRT STATIKUS JELEKFELDOLGOZÁSA

- elcsúszási ábrák

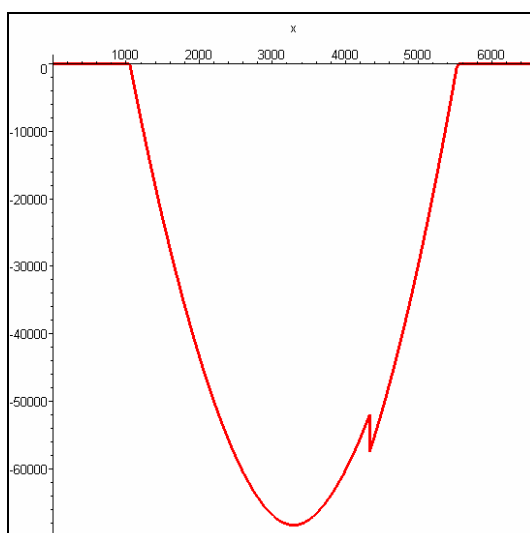


- lehajlási ábrák

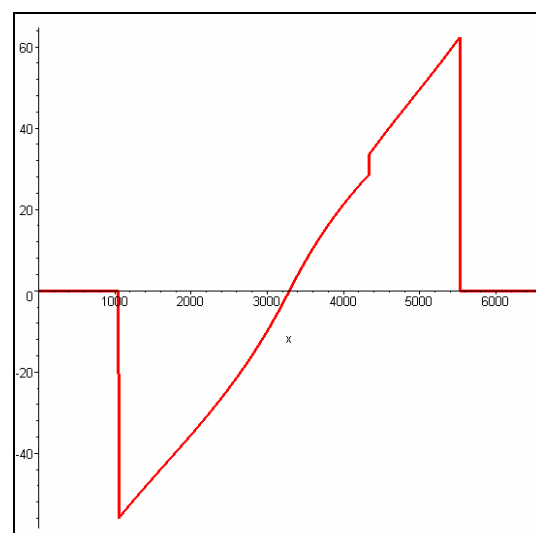


A SZÁMÍTÁSOKHOZ MEG KELLETT HATÁROZNI A STATIKAI VÁZAT, ÉS A BELSŐ ERŐKET

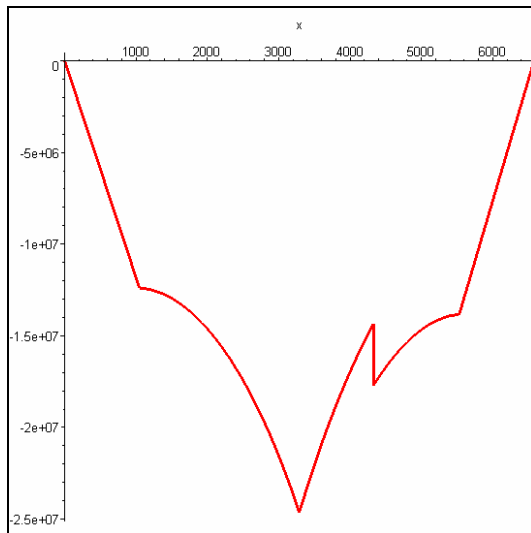
az $N(x)$ normálerőábrára



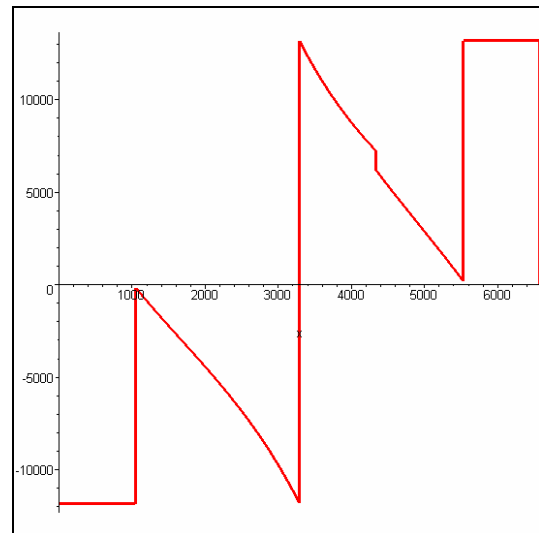
- a csúsztatóerők $T(x)$ ábrája



- az $M_g(x)$ nyomatéki ábra



- a $Q_g(x)$ nyírőerőábra



A $Q_g(x)$ nyírőerőket csak matematikai úton határoztam meg: $Q_g(x) = -\frac{dM_g(x)}{dx}$. Az ábra tartalmaz egy anomáliát, amely matematikailag magyarázható, hatása az eredményekre elhanyagolható.³²

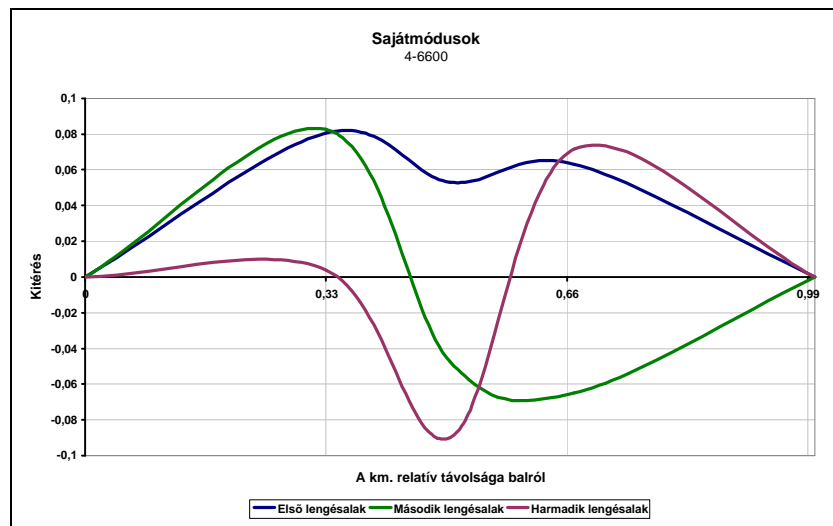
DINAMIKAI MENNYISÉGEK MEGHATÁROZÁSA SZÁMÍTÁSSAL

Statikai váz meghatározása után pótolhatók lettek a hajlékonysági mátrix hiányzó elemei, így a dinamikai számításokat elvégezhettem. Kiszámítottam a sajátfrekvenciákat (az első hármat, mivel három tömegpontot vettem fel), a tömegre normált sajátalakokat, valamint egy állapot rezgési elmozdulásait (mivel a túl sok feltételezés miatt a csillapított rezgés görbéje nem informatív, ezért nem minden állapotra).

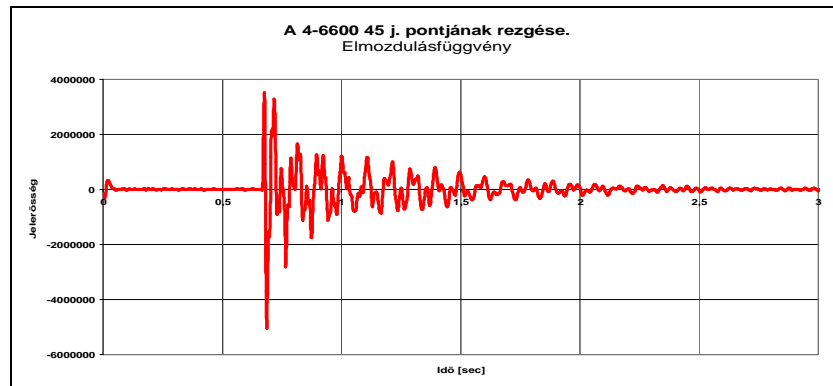
A program tartalma szerinti vizsgálatok kiértékelését, következtetések levonását a tervezettnél kevesebb esetben sikerült elvégezni. A várt eredményt nem értem el teljesen. – Ugyanis faszervezetről és korlátozott időről és munkabírásról lévén szó, a feltételezés túlzott volt.

³² $N(x)$ és $T(x)$ függvény csak a kétfás szakaszon van. Az $M_g(x)$ függvényt pedig úgy számítjuk, hogy a külső terhekből keletkező nyomatékokat (beleértve a rugalmas csukló elfordulása miatti M hatást is) csökkentjük a normálerő hatásával, tehát a külső erők nyomatéka csak a kétfás szakaszon módosul. Az $M_g(x)$ nyomatéki ábra a két szakasz csatlakozásánál törik, ugyanis nem tudtam feltételként megfogalmazni, hogy az $M_g(x) = M(x) - N(x) \cdot h$ egyenletnek megfelelően a $h \cdot N(x)$ és az $M(x)$ görbék érintője a kétfás és az egyfás szakaszok csatlakozásának keresztmetszeteiben azonos legyen. Ugyanis az $N(x)$ görbére szakaszonként két ismeretlen meghatározására írhattam feltételeket, ezek kellett ahhoz, hogy a görbe sima (azaz mindenhol differenciálható és szakaszonként folytonos.) legyen. Ezért elfogadtam azt, hogy a csatlakozásnál az érintők eltérnek, azaz a nyomatéki ábrában törés lesz, és a nyírőerők ábrája pedig ugrik. Mintha a csatlakozásoknál koncentrált erő lenne. – Ebből hiba csak a nyírőerők okozta munkában van, mely mennyiségnek a hatása elhanyagolható.

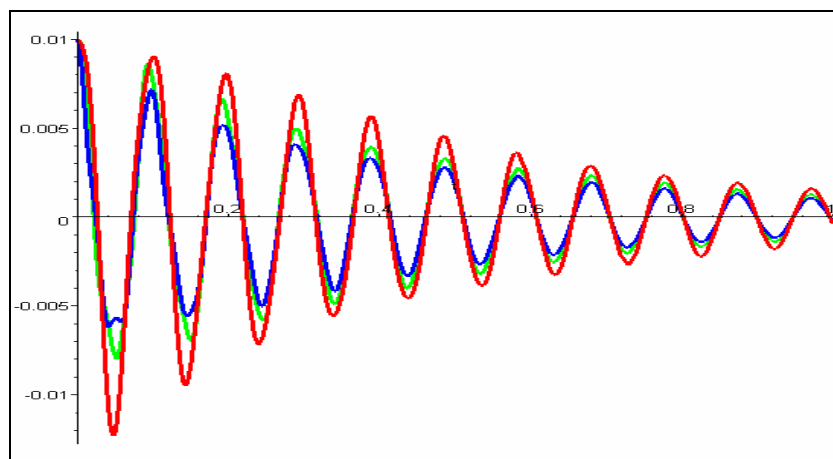
- a tömegmátrixra normált sajátalakok



- a rezgési elmozdulás mért ábrán (a jelek szűrtek!)



- a rezgési elmozdulás számított ábrán (annak feltételezésével, hogy a kezdeti elmozdulás 0,01 mm)



A fentieket tudtam kibogozni a sok mérési eredményből. A munkám során szerzett tapasztalatok hozzájárulnak a további kísérletek és feldolgozások határozottságához.

Győr, 2007. február